



CRNA GORA  
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

## **MATEMATIČKA GIMNAZIJA**

Predmetni program  
**LINEARNA ALGEBRA I ANALITIČKA GEOMETRIJA**

III razred

Podgorica

2020.

## SADRŽAJ

A. NAZIV PREDMETA .....	3
LINEARNA ALGEBRA I ANALITIČKA GEOMETRIJA .....	3
B. ODREĐENJE PREDMETA .....	3
C. CILJEVI PREDMETA .....	4
D. POVEZANOST SA DRUGIM PREDMETIMA I MEĐUPREDMETNIM TEMAMA .....	4
E. OBRAZOVNO-VASPITNI ISHODI PREDMETA .....	6
F. DIDAKTIČKE PREPORUKE ZA REALIZACIJU PREDMETA .....	13
G. PRILAGOĐAVANJE PROGRAMA DJECI SA POSEBNIM OBRAZOVNIM POTREBAMA I DAROVITIM UČENICIMA .....	15
H. VREDNOVANJE OBRAZOVNO-VASPITINIH ISHODA .....	16
I. USLOVI ZA REALIZACIJU PREDMETA (STRUČNA SPREMA) .....	18

## A. NAZIV PREDMETA

### LINEARNA ALGEBRA I ANALITIČKA GEOMETRIJA

## B. ODREĐENJE PREDMETA

Linearna algebra i analitička geometrija su oblasti iz kategorije fundamentalnih i klasičnih tema matematike. Sadržaji koji su odredili ove discipline javljaju se kroz pokušaje rješavanja brojnih praktičnih problema, na samim počecima stvaranja matematičke misli. Arhimed je u III vijeku prije nove ere određivao položaje brodova na moru mjereći rastojanja prema zvijezdama u vasioni. Takav zadatak je izlazio iz domena elementarne geometrije u kojoj se brojevima izražavaju samo veličine geometrijskih objekata, a ne položaj objekata u odnosu na fiksirane tačke. Velika Dekartova ideja da se tačkama u ravni i prostoru pridružuju koordinate omogućila je da se razni geometrijski likovi opišu algebarskim jednačinama, nejednačinama ili sistemima jednačina i nejednačina, i dovela je do prirodne sinteze geometrije i algebre. Ovim je široko otvoren prostor za dalji procvat matematike. Naravno, sa izgradnjom matematike, razvijanjem metoda i matematičkog jezika, linearna algebra i analitička geometrija su mijenjale oblike i načine predstavljanja, ali je osnovna naučna nit sačuvana.

### a) Položaj, primjena i namjena predmeta

Nastavni predmet Linearna algebra i analitička geometrija, za koji je urađen ovaj program, pripada opšteobrazovnoj grupi predmeta u MATEMATIČKOJ GIMNAZIJI. Izučava se u trećem razredu sa tri časa sedmično.

### b) Broj časova i oblici nastave

Razred	Sedmični broj časova	Ukupno časova	Obavezni dio (80-85%)	Otvoreni dio (15-20%)	Teorijska nastava	Vježbe i ostali vidovi
III	3	108	92	16	38	54

**Obavezni dio** – ukazuje na broj časova za koje se definišu ishodi u ovom programu. U okviru obaveznog dijela zastupljena je teorijska nastava, vježbe i ostali vidovi nastave.

**Teorijska nastava** – podrazumijeva časove na kojima se dominantno uvode novi sadržaji.

**Vježbe i ostali vidovi** – odnose se na časove koji su dominantno posvećeni ponavljanju, uvježbavanju, ocjenjivanju i sl.

**Otvoreni dio** – odnosi se na časove čije ishode planira škola (nastavnik, odnosno aktiv matematike škole u saradnji sa roditeljima, učenicima<sup>1</sup>, lokalnom zajednicom).

---

<sup>1</sup> Svi izrazi koji se u ovom materijalu koriste u muškom rodu obuhvataju iste izraze u ženskom rodu.

**Napomena:** Predloženi fond časova za teorijsku nastavu (novi pojmovi i sadržaji) i vježbe i ostali dio nastave dat je orijentaciono i on može biti veći ili manji za nekoliko časova.

### **C. CILJEVI PREDMETA**

Ciljevi u nastavi predmeta Linearna algebre i analitička geometrija ostvaruju se kroz realizaciju i dostizanje sazajnih i procesnih ciljeva. Sazajni ciljevi obuhvataju očekivanja o tome koja znanja će učenik steći usvajanjem matematičkih sadržaja datih u program, dok procesni obuhvataju očekivanja o tome koje vještine, stavove i vrijednosti će učenik razvijati u procesu učenja predmeta Linearna algebra i analitička geometrija.

Kroz sazajne ciljeve učenici treba da:

- usvoje matematička znanja potrebna za praćenje toka savremenog razvoja linearne algebre i analitičke geometrije;
- usvoje osnovna sredstva i metode linearne algebre;
- usvoje klasične pojmove i prateće tehnike linearne algebre – linearne jednačine, matrice, determinante;
- usvoje odnose linearnih i kvadratnih algebarskih jednačina, s jedne, i geometrijskih pojmova i objekata – prave, ravni, krive drugog reda, s druge strane;
- usvoje opštu i apstraktnu formu osnovnih pojmova savremene linearne algebre – linearni ili vektorski, euklidski linearni prostori;
- ovladaju koordinatnom metodom u radu sa geometrijskim problemima i zadacima;
- znaju da rješavaju konkretne zadatke iz fizike, hemije, biologije i geografije upotrebom sredstava i metoda linearne algebre i analitičke geometrije.

Kroz procesne ciljeve učenici treba da razvijaju:

- sposobnost logičkog, kritičkog i apstraktnog mišljenja;
- vještine i sposobnosti formulisanja problema;
- sposobnost rješavanja problema;
- vještinu korišćenja nekih od kompjuterskih programa, npr. geogebra;
- sposobnost da prepoznaju situacije u svakodnevnom životu u kojima se mogu primijeniti matematička znanja;
- inovativnost;
- kreativnost;
- osjećaj za saradnju i timski rad.

### **D. POVEZANOST SA DRUGIM PREDMETIMA I MEĐUPREDMETNIM TEMAMA**

Veza Linearne algebre i analitičke geometrije sa drugim predmetima i međupredmetnim temama pokazuje svrhu i značaj njenog učenja. Međupredmetne oblasti/teme u opšteobrazovne programe uključuju sadržaje koji nijesu dio standardnih školskih disciplina. One doprinose integrativnom i sveobuhvatnom pristupu u obrazovanju.

Moguć, orijentacioni prijedlog korelacije je u tabeli.

Tema	Korelacija
1. Algebarske strukture	Matematička analiza sa algebrom: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Skupovi brojeva Z, Q, R, C</li> </ul> Matematička logika
2. Matrice, determinante i sistemi linearnih jednačina (SLJ)	Fizika: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Drugo Kirhofovo pravilo (rješavanje sistema linearnih jednačina)</li> </ul> Hemija: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Rješavanje zadataka (linearne jednačine i sistemi linearnih jednačina)</li> </ul>
3. Vektorska algebra	Fizika: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Vektorske veličine, slaganje sila, opisivanje kretanja tijela u ravni pomoću vektora, obrada pojma rada, drugi Njutnov zakon, složeno kretanje, kružno kretanje, moment sile, zakon održanja impulse, elektromagnetno polje, Lorencova sila, moment impulse.</li> </ul> Geometrija: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Primjena vektora u geometriji.</li> </ul>
4. Jednačina prave i ravni	Fizika: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Direktna proporcionalnost dvije fizičke veličine, jednačina prave svjetlosnog zraka kroz tačku.</li> </ul>
5. Krive drugog reda	Astronomija: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Kretanje nebeskih tijela.</li> </ul> Fizika: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Jednačina kretanja tačke, kosi hitac, zakoni refleksije.</li> </ul> Građevinarstvo – dizajniranje velikih objekata (rashladni sistemi nuklearnih elektrana, objekti sa lukovima...).
6. Vektorski prostori	Fizika: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Kvantna mehanika, fazni prostori čestice.</li> </ul> Analiza: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Vektorski prostor polinoma, funkcija</li> </ul> Kvaternioni – pomoću kvaterniona se opisuju prostorne rotacije koje se primjenjuju u 3D računarskoj grafici, teorijskoj mehanici... Položaj svemirskih satelita u orbiti kontroliše se pomoću kvaterniona.

## E. OBRAZOVNO-VASPITNI ISHODI PREDMETA

Za obrazovno-vaspitne ishode predmeta Linearna algebra i analitička geometrija korišćeni su aktivni glagoli čiji je nivo zahtjeva detaljno razrađen u poglavlju F – Didaktičke preporuke za realizaciju predmeta.

### Obrazovno-vaspitni ishod 1

#### ALGEBARSKE STRUKTURE

*Na kraju izučavanja ove teme učenik će moći da primijeni stečena znanja u različitim oblastima matematike i drugim naučnim disciplinama.*

#### Ishodi učenja

*Tokom učenja učenik će moći da:*

- definiše binarnu operaciju i grupoid;
- ispita svojstva komutativnih i asocijativnih grupoida;
- identifikuje asocijativni grupoid sa polugrupom ili semigrupom;
- navede svojstva neutralnog (jediničnog) elementa u grupoidu;
- zaključi da u grupoidu postoji najviše jedan neutralni element;
- navede svojstva međusobno inverznih elemenata u grupoidu;
- zaključi da u grupoidu sa jedinicom svakom elementu pripada najviše jedan inverzni element;
- definiše grupu;
- zaključi da u grupi postoji tačno jedan neutralni element;
- zaključi da svakom element grupe pripada tačno jedan inverzni element;
- ispita (provjerom svojstava) da li je data algebarska struktura sa jednom operacijom grupa;
- objasni zakon kancelacije koji važi u grupi;
- definiše podgrupu;
- riješi zadatke u kojima se ispituje da li je zadata algebarska struktura podgrupa date grupe;
- navede formulaciju Lagranževih teorema;
- definiše prsten, tijelo i polje;
- riješi zadatke u kojima se ispituje (provjerom svojstava) da li je data algebarska struktura sa dvije operacije prsten, tijelo ili polje.

#### Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitanog ishoda:

**a) Sadržaji/pojmovi:** binarna operacija; grupoid; polugrupa; grupa; grupa permutacija; podgrupa; Lagranžova teorema; prsten; tijelo; polje; polje ostatka po modulu  $m$ .

#### b) Aktivnosti učenja

Učenici:

- navode primjere binarnih operacija i grupoida;
- samostalno provjeravaju komutativnost i asocijativnost konkretnih grupoida;
- u zadatom grupoidu određuju neutralni element i inverzni element zadanog elementa;
- samostalno provjeravaju da li je zadati grupoid grupa;
- samostalno provjeravaju da li zadati podskup grupe čini podgrupu;
- samostalno dokazuju da li je zadata algebarska struktura sa jednom operacijom grupa;
- navode primjere prstena, tijela i polja sa naglaskom na primjere izučavane u sklopu ranije odslušanog predmeta;
- samostalno dokazuju jednostavna svojstva prstena (tijela, polja);

- samostalno provjeravaju da li je zadata algebarska struktura sa dvije operacije prsten (tijelo, polje);
- sarađuju u timu u rješavanju složenijih problema.

**c) Broj časova realizacije (orijentaciono): 10 časova.**

### **Obrazovno-vaspitni ishod 2**

#### **MATRICE, DETERMINANTE I SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA (SLJ)**

*Na kraju izučavanja ove teme učenik će moći da primijeni svojstva determinanti i matrica pri rješavanju različitih problema kao i da primijeni odgovarajuće metode i tehnike za rješavanje konkretnih sistema linearnih jednačina.*

#### **Ishodi učenja**

*Tokom učenja učenik će moći da:*

- objasni osnovne pojmove u vezi sa matricama;
- sprovede postupak sabiranja matrica;
- primijeni svojstva operacije sabiranja matrica;
- sprovede postupak množenja matrice brojem;
- primijeni svojstva operacije množenja matrice brojem;
- sprovede postupak množenja matrica;
- primijeni svojstva operacije množenja matrica;
- objasni elementarne transformacije vrsta i kolona matrica;
- odredi transponovanu matricu date matrice;
- definiše determinantu;
- primijeni svojstva determinante;
- objasni kako se mijenja vrijednost determinante u zavisnosti od tipa elementarne transformacije;
- primijeni Sarusovo pravilo;
- primijeni Laplasovu teoremu;
- prepozna regularnu matricu;
- odredi inverznu matricu za zadata regularnu matricu;
- definiše osnovne pojmove u vezi sa SLJ;
- zapiše SLJ u matričnom obliku;
- primijeni Gausov metod za rješavanje SLJ;
- definiše rang matrice;
- navede svojstva ranga matrice;
- zaključi da se elementarnim transformacijama ne mijenja rang matrice;
- formuliše Kroneker-Kapelijevu teoremu;
- riješi SLJ primjenom Kroneker-Kapelijeve teoreme;
- objasni Kramerovo pravilo za kvadratne SLJ;
- riješi SLJ primjenom Kramerovog pravila

#### **Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda:**

##### **a) Sadržaji/pojmovi:**

Učenici:

- matrica, nula matrica, trapezna (trougaona) matrica, kvadratna matrica, dijagonalna matrica, jedinična matrica, suprotna matrica;
- sabiranje i oduzimanje matrica, množenje matrice brojem, množenje matrica, matrični polinom;
- transponovana matrica;
- elementarne transformacije vrsta i kolona matrice, ekvivalentne matrice;

- determinanta, minor, algebarski komplement;
- primjena elementarnih transformacija na izračunavanje determinanti;
- Sarusovo pravilo;
- Laplasova teorema;
- inverzna matrica, regularna matrica, adjungovana matrica;
- rang matrice, stav o baznom minoru, elementarne transformacije i rang matrice;
- sistemi linearnih jednačina (SLJ), homogeni SLJ, kvadratni SLJ, saglasan (određen, neodređen) i nesaglasan SLJ, matrični zapis SLJ, matrična jednačina;
- Gausov metod;
- Kroneker-Kapelijeva teorema;
- Kramerovo pravilo.

### **b) Aktivnosti učenja**

Učenici:

- samostalno računaju zbir dvije matrice i proizvod matrice i broja;
- primjenom elementarnih transformacija svode zadatu matricu na trougaoni oblik ili stepenasti oblik;
- objašnjavaju za koje matrice A i B postoji proizvod AB i u konkretnim primjerima računaju taj proizvod;
- navode primjere koji pokazuju da množenje matrica nije komutativno;
- računaju stepene kvadratnih matrica;
- računaju vrijednosti matričnih polinoma;
- dokazuju da za komutativne kvadratne matrice važe formule za kvadrat zbira i razliku kvadrata;
- primjenjuju Sarusovo pravilo i računaju vrijednost determinante trećeg reda;
- koriste svojstva determinanti i računaju njihovu vrijednost u složenijim slučajevima;
- samostalno određuju inverznu matricu zadate matrice;
- primjenjuju elementarne transformacije i određuju rang matrice;
- samostalno rješavaju SLJ Gausovim metodom;
- samostalno rješavaju SLJ primjenom Kroneker-Kapelijeve teoreme;
- samostalno rješavaju SLJ primjenom Kramerovog pravila;
- samostalno rješavaju homogene SLJ;
- sarađuju u timu u rješavanju složenijih zadataka;
- koriste GeoGebru za:
  - \* provjeru rezultata operacija sa matricama,
  - \* određivanje inverzne matrice, adjungovane matrice,
  - \* grafičko prikazivanje rješenja SLJ,
  - \* primjenu matrica kod različitih transformacija u ravni i prostoru, ...
- rade seminarske radove i prezentacije na temu primjena matrica.

**c) Broj časova realizacije (orientaciono): 30 časova.**

### **Obrazovno-vaspitni ishod 3**

#### **VEKTORSKA ALGEBRA**

*Na kraju izučavanja ove teme učenik će moći da primijeni znanja iz vektorske algebre za dokazivanje osnovnih teorema u vezi sa odgovarajućim sadržajem kao i za primjenu u različitim oblastima matematike i drugim naučnim disciplinama.*

#### **Ishodi učenja**

*Tokom učenja učenik će moći da:*

- objasni osnovne pojmove u vezi sa vektorima;
- sprovede postupak sabiranja vektora;



- primijeni osnovna svojstva operacije sabiranja vektora;
- sprovede postupak množenja vektora skalarom;
- primijeni osnovna svojstva operacije množenja vektora skalarom;
- odredi linearnu zavisnost ili linearnu nezavisnost sistema vektora;
- objasni pojam baze vektora;
- zaključi da svaka dva nekolinearna vektora ravni čine bazu te ravni;
- zaključi da svaka tri nekomplanarna vektora prostora čine bazu tog prostora;
- zaključi da se svaki vektor na jedinstven način može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze;
- objasni šta je koordinatni sistem u ravni, odnosno u prostoru i kako se određuju koordinate tačaka u tim sistemima;
- prepozna koordinate vektora;
- primijeni pravila za obavljanje osnovnih operacija sa vektorima pomoću njihovih koordinata u zadatoj bazi;
- primijeni formulu za određivanje rastojanja između dvije tačke zadate koordinatama;
- primijeni formulu za određivanje koordinate tačke koja zadatu duž dijeli u zadatom prirodosu;
- definiše ortogonalnu projekciju vektora;
- definiše skalarni proizvod vektora;
- primijeni osnovna svojstva skalarnog proizvoda vektora;
- definiše vektorski proizvod vektora;
- primijeni osnovna svojstva vektorskog proizvoda vektora;
- definiše mješoviti proizvod vektora;
- primijeni osnovna svojstva mješovitog proizvoda vektora;
- riješi probleme iz geometrije primjenom skalarnog, vektorskog i mješovitog proizvoda;
- primijeni znanje iz vektorske algebra na rješavanje zadataka iz fizike.

**Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda:**

**a) Sadržaji/pojmovi:** vektor kao usmjerena duž; nula vektor; intenzitet vektora; kolinearnost i komplanarnost vektora; upoređivanje kolinearnih vektora po smjeru; jednakost vektora; suprotan vektor; sabiranje i oduzimanje vektora; množenje vektora skalarom; linearna zavisnost i nezavisnost vektora; baza u ravni (prostoru); razlaganje vektora po bazi; koordinatni sistem u ravni odnosno u prostoru; koordinate vektora u bazi; operacije sa vektorima zadatih pomoću koordinata; rastojanje između dvije tačke; podjela duži u zadatom odnosu; skalarna projekcija vektora; skalarni proizvod vektora; vektorski proizvod vektora; mješoviti proizvod vektora.

**b) Aktivnosti učenja**

Učenici:

- rješavaju geometrijske zadatke koristeći vektore;
- utvrđuju linearnu zavisnost ili linearnu nezavisnost sistema vektora;
- određuju koordinate vektora u zadatoj bazi;
- samostalno računaju sa vektorima koristeći njihov koordinatni prikaz;
- samostalno rješavaju zadatke primjenom formula za rastojanje između dvije tačke i podjelu duži u zadatom odnosu;
- koristeći formulu za skalarni proizvod u funkciji koordinata samostalno rješavaju zadatke u kojima treba odrediti ugao između dva vektora i algebarsku projekciju vektora na pravu;
- objašnjavaju geometrijsku interpretaciju vektorskog proizvoda;

- koristeći formulu za vektorski proizvod u funkciji koordinata samostalno rješavaju zadatke u vezi sa površinama trougla i paralelograma i zadatke u vezi sa kriterijumom kolinearnosti;
- koristeći formulu za mješoviti proizvod u funkciji koordinata samostalno rješavaju zadatke u vezi sa zapreminom paralelopipeda i zadatke u vezi sa kriterijumom komplanarnosti;
- sarađuju u timu u rješavanju složenijih problema;
- koriste GeoGebru za demonstracije vektora i operacije sa vektorima;
- pripremaju seminarske radove i prezentacije koji se odnose na primjenu vektora.

**c) Broj časova realizacije (orijentaciono): 14 časova.**

#### **Obrazovno-vaspitni ishod 4**

##### **JEDNAČINE PRAVE I RAVNI**

**Na kraju izučavanja ove teme učenik će moći da primijeni koordinatni metod pri rješavanju geometrijskih zadataka.**

##### **Ishodi učenja**

*Tokom učenja učenik će moći da:*

- prepozna razne oblike jednačine prave u ravni;
- primijeni odgovarajući oblik jednačine prave u ravni;
- objasni geometrijsko značenje koeficijenata  $k$  i  $n$  u eksplicitnom obliku jednačine prave  $y = kx + n$ ;
- primijeni uslove paralelnosti i normalnosti dvije prave;
- primijeni formulu za računanje ugla između dvije prave u ravni;
- primijeni formulu za računanje rastojanja tačke od prave u ravni;
- riješi različite problemske situacije vezane za prave u ravni;
- prepozna razne oblike jednačine ravni;
- primijeni u zadatku odgovarajući oblik jednačine ravni;
- objasni geometrijsko značenje koeficijenata  $A$ ,  $B$  i  $C$  u opštoj jednačini ravni  $Ax + By + Cz + D = 0$ ;
- primijeni uslove paralelnosti i normalnosti dvije ravni;
- prepozna razne oblike jednačine prave u prostoru;
- primijeni odgovarajući oblik jednačine prave u prostoru;
- odredi ugao između dvije prave u prostoru, ugao između dvije ravni i ugao između prave i ravni;
- primijeni uslove paralelnosti i normalnosti dvije prave u prostoru, dvije ravni i prave i ravni;
- primijeni formule za računanje rastojanja tačke od prave u prostoru, odnosno tačke od ravni;
- riješi različite problemske situacije vezane za prave i ravni u prostoru.

##### **Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda:**

**a) Sadržaji/pojmovi:** vektorska, parametarska, kanonska jednačina prave u ravni; eksplicitni, opšti i segmentni oblik jednačine prave u ravni; jednačine pravih paralelnih koordinatnim osama u ravni; odnos između dvije prave u ravni; ugao između dvije prave u ravni; normala iz date tačke na datu pravu u ravni; rastojanje tačke od prave u ravni; vektorska, parametarska jednačina ravni; opšti i segmentni oblik jednačine ravni; odnos između dvije ravni; vektorska, parametarska i kanonska jednačina prave u prostoru; odnos između dvije prave u prostoru; odnos između prave i ravni; rastojanje tačke od prave u prostoru; rastojanje tačke od ravni.

## b) Aktivnosti učenja

Učenici:

- samostalno prevode eksplicitni oblik jednačine prave u opšti i segmentni i obrnuto;
- utvrđuju da li su dvije zadate prave u ravni normalne (paralelne);
- samostalno određuju jednačinu prave u ravni koja prolazi kroz datu tačku i normalna je na datu pravu;
- samostalno određuju jednačinu prave u ravni koja prolazi kroz datu tačku paralelno datoj pravoj;
- samostalno računaju u ravni ugao između dvije prave koje se sijeku;
- samostalno računaju rastojanje tačke od prave u ravni;
- određuju jednačinu ravni koja prolazi kroz tri zadate tačke;
- utvrđuju da li su dvije ravni zadate opštom jednačinom normalne (paralelne);
- određuju jednačinu ravni koja prolazi kroz dvije zadate tačke i normalna je na datu ravan;
- određuju jednačinu ravni koja prolazi kroz zadatu tačku paralelno datoj ravni;
- zapisuju vektorski, kanonski, segmentni oblik jednačine prave u prostoru;
- zapisuju jednačine prave u prostoru koja prolazi kroz dvije zadate tačke;
- utvrđuju međusobni odnos dvije prave kao i prave i ravni;
- samostalno računaju rastojanje tačke od prave u prostoru;
- samostalno računaju rastojanje tačke od ravni;
- saraduju u timu u rješavanju složenijih zadataka;
- koriste GeoGebru za različite demonstracije vezane za ravan i pravu u ravni i prostoru.

c) Broj časova realizacije (orijentaciono): 10 časova.

### Obrazovno-vaspitni ishod 5

#### KRIVE DRUGOG REDA

*Na kraju izučavanja ove teme učenik će moći da primijeni koordinatni metod za rješavanje zadatka koji uključuju krive drugog reda.*

#### Ishodi učenja

*Tokom učenja učenik će moći da:*

- prepozna jednačinu opšte i centralne kružnice;
- crta u koordinatnoj ravni kružnicu zadate jednačine;
- objasni osnovne pojmove u vezi sa elipsom (radijus vektori, fokusi, velika i mala osa, poluose, centar, tjemena, linearni i numerički ekscentritet, direktrisa);
- crta u koordinatnoj ravni elipsu zadate jednačine;
- objasni osnovne pojmove u vezi sa hiperbolom (radijus vektori, fokusi, realna osa, imaginarna osa, poluose, centar, tjemena, linearni i numerički ekscentritet, direktrisa, asimptote);
- crta u koordinatnoj ravni hiperbolu zadate jednačine;
- objasni osnovne pojmove u vezi sa parabolom (fokus, direktrisa, parametar parabole, tjeme);
- crta u koordinatnoj ravni parabolu zadate jednačine;
- riješi zadatke primjenom znanja o osnovnim pojmovima u vezi sa krivim linijama drugog reda;
- odredi presjek prave i krive drugog reda;
- primijeni uslove dodira prave i krivih drugog reda;
- odredi jednačinu tangente i normale krive drugog reda;
- identifikuje krive drugog reda sa skupovima tačaka u ravni čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednačinu drugog reda;
- riješi različite geometrijske zadatke u vezi sa krivim linijama drugog reda.

**Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda:**

**a) Sadržaji/pojmovi:** jednačina i osobine kružnice; prava i kružnica; uslov dodira prave i kružnice; jednačina i osobine elipse; prava i elipsa; uslov dodira prave i elipse; jednačina tangente na elipsu; jednačina i osobine hiperbole; prava i hiperbola; asimptote hiperbole; tangenta hiperbole; uslov dodira prave i hiperbole; jednačina i osobine parabole; prava i parabola; tangenta parabole; uslov dodira prave i parabole; kružnica, elipsa, parabole i hiperbola kao presjeci konusne površi i ravni; pojam krive drugog reda.

**b) Aktivnosti učenja**

Učenici:

- samostalno svode jednačine krivih drugog reda na kanonski oblik;
- samostalno određuju jednačine krivih drugog reda koje zadovoljavaju određene uslove;
- samostalno utvrđuju međusobni odnos pravih i krivih drugog reda;
- određuju jednačine tangente i normale krivih drugog reda;
- sarađujući u timu rješavaju geometrijske zadatke u vezi sa krivima drugog reda;
- koriste GeoGebru za različite demonstracije vezane za krive drugog reda;
- pripremaju seminarske radove i prezentacije na temu krivih drugog reda i njihove primjene.

**c) Broj časova realizacije (orijentaciono): 18 časova.**

**Obrazovno-vaspitni ishod 6****VEKTORSKI PROSTORI**

*Na kraju izučavanja ove teme učenik će moći da primijeni odgovarajuće metode i tehnike za rješavanje zadataka u konkretnim vektorskim prostorima.*

**Ishodi učenja**

*Tokom učenja učenik će moći da:*

- definiše vektorski prostor;
- definiše potprostor;
- zaključi da su zbir i presjek potprostora nekog prostora potprostori tog prostora;
- definiše linearni omotač sistema vektora;
- dokaže da je linearni omotač proizvoljnog sistema vektora potprostor;
- definiše linearno zavisani i linearno nezavisni sistem vektora;
- primijeni osnovna svojstva linearno zavisnih i linearno nezavisnih sistema vektora;
- definiše bazu vektorskog prostora;
- navede osnovne primjere baze vektorskog prostora;
- primijeni operacije sa vektorima u koordinatnoj formi;
- ispita linearnu zavisnost sistema vektora u proizvoljnom vektorskom prostoru;
- zaključi da sve baze vektorskog prostora imaju jednak broj vektora;
- definiše dimenziju vektorskog prostora;
- zaključi da se svaki linearno nezavisni sistem vektora može dopuniti do baze;
- definiše matricu prelaza s jedne na drugu bazu;
- primijeni formulu kojom se izražava veza između koordinata istog vektora u dvijema različitim bazama.

**Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda:**

**a) Sadržaji/pojmovi:** vektorski prostori; primjeri vektorskih prostora; potprostori; linearna kombinacija; linearni omotač; suma i presjek potprostora; linearna zavisnost i linearna nezavisnot

sistema vektora; baza i dimenzija vektorskog prostora; koordinate vektora u odnosu na bazu; matrica prelaza; promjena koordinata vektora pri prelazu na novu bazu.

#### **b) Aktivnosti učenja**

Učenici:

- navode primjere vektorskih prostora (prostor orijentisanih duži, prostor  $n$ -torki, prostor polinoma stepena  $\leq n$ , prostor matrica,...);
- dokazuju da je skup sa zadatim operacijama vektorski prostor;
- provjeravaju da li je zadati podskup vektorskog prostora potprostor tog prostora;
- zapisuju zadati vektor u obliku linearne kombinacije zadatog sistema vektora;
- ispituju linearnu zavisnost i linearnu nezavisnost sistema vektora;
- ispituju da li neki sistem vektora čini bazu zadatog vektorskog prostora;
- određuju koordinate vektora u zadatoj bazi vektorskog prostora;
- dopunjavaju linearno nezavisni sistem vektora do baze;
- određuju bazu linearnog omotača zadatog sistema vektora;
- određuju baze sume i presjeka potprostora;
- određuju matricu prelaza sa jedne na drugu bazu vektorskog prostora;
- određuju koordinate vektora u zadatoj bazi ako je taj vektor zadat koordinatama u nekoj drugoj bazi;
- sarađuju u timu u rješavanju složenijih zadataka;
- koriste GeoGebru za različite demonstracije vezane za vektorski prostor.

**c) Broj časova realizacije (orijentaciono): 10 časova.**

## **F. DIDAKTIČKE PREPORUKE ZA REALIZACIJU PREDMETA**

Program za linearnu algebru i analitičku geometriju je koncipiran tako da učenici ovladaju osnovnim znanjima iz ovih oblasti matematike, upoznavajući pri tome jedinstvo algebre i geometrije.

Tokom realizacije predmetnog programa potrebno je primijenjivati dostignuća pedagogije, psihologije i metodike nastave matematike uz korišćenje savremene nastavne tehnologije. ICT otvara znatan broj novih mogućnosti u nastavi i učenju (npr. učenicima treba omogućiti da za domaći rad rade seminarske radove i prezentacije o odabranim temama).

U svojim pripremama nastavnici treba da planiraju više aktivnosti u kojima su učenici angažovaniji od njih vodeći pri tom računa da kroz te aktivnosti učenik treba da usvoji određena znanja, vještine i stavove definisane ishodom učenja. Tokom časa, nastavnik može da ostvari više ishoda učenja različitih nivoa zahtjeva.

U tabeli koja slijedi navedeni su aktivni glagoli za ishode učenja predmeta Linearna algebra i analitička geometrija, razvrstani po nivoima zahtjeva.

I nivo zahtjeva	II nivo zahtjeva	III nivo zahtjeva
<b>definiše</b> <b>navede</b> <b>formuliše</b> <b>identifikuje</b> <b>prepozna</b> <b>objasni</b> <b>cрта</b> <b>zapiše</b>	<b>zaključí</b>	
	<b>ispita</b> <b>odredi</b> <b>sprovede</b>	
	<b>riješí (problem)</b>	
<b>primijeni</b>		

Glagoli **ispita**, **odredi** i **sprovede** koriste se kao aktivni glagoli za ishode I i II nivoa zahtjeva u zavisnosti od težine primjera/zadatka.

Glagol **riješí** koristi se kao aktivni glagol za ishode II i III nivoa zahtjeva u zavisnosti od nivoa prepoznatljivosti i težine problema/zadatka.

Glagol **primijeni** koristi se kao aktivni glagol za ishode sva tri nivoa zahtjeva u zavisnosti od toga da li je primjena formule (pravila, metode), primjena koja se u datoj situaciji očekuje ili primjena koja se vrši u neočekivanoj (novoj) situaciji.

Važan zadatak nastavnika je da stalno osposobljava učenike da koriste odgovarajući udžbenik i prateću literature, kako na času tako i pri samostalnom učenju. Značajno bi bilo da program prati pregledan, savremen, zanimljiv i grafički dobro urađen udžbenik i zbirka zadataka. Školska biblioteka treba da posjeduje udžbenike, zbirke zadataka i drugu literaturu u kojoj su obrađene teme iz linearne algebre i analitičke geometrije.

U realizaciji nastave preporučuje se korišćenje kompjuterskih programa (npr. GeoGebra) posebno u oblastima: Matrice, determinante i sistemi linearnih jednačina, Vektorska algebra, Jednačine prave i ravni, Krive drugog reda.

Osnovne preporuke po tematskim cjelinama su:

**Algebarske strukture.** U ovoj temi potrebno je da učenici ovladaju pojmom grupe i polja imajući u vidu poznate primjere brojevnih grupa i polja, da razumiju pojam jednačine sa jednom i više nepoznatih u grupi i polju i da taj jezik kasnije koriste kod matrica, sistema linearnih jednačina i vektorskih prostora. Kao osnovu za izračunavanje posebnih algebarskih struktura treba koristiti algebarsku strukturu skupa

realnih brojeva. Učenici treba da usvoje da se u jednom skupu, koji u odnosu na neku operaciju ima strukturu grupe, računa po pravilima koja važe za grupu.

**Vektorska algebra.** S obzirom na to da su se učenici upoznali sa geometrijskim vektorima u prethodnim razredima, ovdje treba naročito obratiti pažnju na skalarni, vektorski i mješoviti proizvod kao pojmove koji imaju važnu ulogu u matematici i njihovim primjenama.

**Matrice, determinante i sistemi linearnih jednačina.** Matrica na nekom polju može se definisati kao uređena  $n$ -torka uređenih  $m$ -torki, ili kao funkcija, ali uz obavezno navođenje primjera gdje se prirodno pojavljuju matrice (npr. promjena baze vektorskog prostora). Uvođenje pojma determinante i sistema linearnih jednačina treba da se bazira na poznatom sistemu od dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate, gdje se pojavljuje determinanta drugog reda.

**Vektorski prostori.** U izučavanju vektorskih prostora polazi se od vektorskog prostora geometrijskih vektora. Centralni pojmovi su linearni vektorski prostor i linearna zavisnost sistema vektora. Treba insistirati na saznanju da svojstva geometrijskih vektora imaju i drugi "negeometrijski" objekti u matematici.

**Jednačine prave i ravni. Krive drugog reda.** Potrebno je da učenici usvoje koordinatni metod u matematici, koji se sastoji u tome da se odredi jednačina određenog skupa tačaka prostora, kao i da se odredi skup tačaka prostora opisan datom jednačinom u odnosu na dati koordinatni sistem. Ovdje je potrebno stalno isticati vezu između znanja iz geometrije koje su učenici stekli u prethodnim razredima.

## **G. PRILAGOĐAVANJE PROGRAMA DJECI SA POSEBNIM OBRAZOVNIM POTREBAMA I DAROVITIM UČENICIMA**

### **a) Prilagođavanje programa djeci sa posebnim obrazovnim potrebama**

Zakon o vaspitanju i obrazovanju djece sa posebnim obrazovnim potrebama, članom 12 definiše način prilagođavanja nastave i učenja učenicima sa posebnim obrazovnim potrebama koji se školuju po Programu uz obezbjeđivanja dodatnih uslova, pomagala i stručne pomoći u gimnazijskom obrazovanju.

U zavisnosti od smetnji i teškoća u razvoju, sposobnosti i potreba učenika, individualni program omogućava mijenjanje, prilagođavanje i individualizaciju metodike kojom se sadržaji realizuju.

Primjer: za učenike sa oštećenim vidom, škola treba da u saradnji s Resursnim centrom Podgorica obezbijedi udžbenike na Brajevom pismu, elektronske udžbenike, omogući siguran i bezbjedan prostor bez barijera i sl.

### **b) Prilagođavanje programa nadarenim učenicima**

Prema Strategiji za razvoj i podršku darovitim učenicima (2015-2019), predviđen je specifični cilj: „Omogućiti obogaćivanje kurikuluma kao jedan od modela podsticanja darovitosti u školi.”

Za darovite učenike nastavnik prilagođava program predmeta Linearna algebra i analitička geometrija tako što u okviru redovnog programa bira zadatke i sadržaje koji će produbiti i proširiti njihovo znanje. Preporučuje se timski rad darovitih učenika i izvođenje malih istraživačkih projekata.

## H. VREDNOVANJE OBRAZOVNO-VASPITINIŠ ISHODA

Vrednovanje obrazovno-vaspitiš ishoda je važna komponenta nastave predmeta Linearna algebra i analitička geometrija (u daljem tekstu predmeta) i ono se mora kontinuirano sprovoditi u toku izvođenja nastave. Pored vrednovanja uspjeha učenika omogućava nastavniku samoevaluaciju rada, na osnovu koje može da koriguje pedagoški rad.

Vrednovanje obrazovno-vaspitiš ishoda obuhvata:

- poštovanje i povjerenje između učenika i nastavnika;
- individualnost;
- permanentnost;
- utvrđivanje i sticanje novih znanja kroz aktivnost učenika u nastavnom procesu;
- podsticanje radoznalosti učenika i njegov osjećaj napredovanja;
- motivisanje učenika za učenje predmeta kroz razvijanje i osposobljavanje učenika za samoučenje;
- provjeru znanja i vještina;
- ocjenjivanje;
- upoznavanje učenika i roditelja sa postignućem učenika.

Tokom nastave nastavnik treba da izgradi uzajamno poštovanje i povjerenje sa učenikom. Ovo je posebno važno prilikom aktivnosti koje se odnose na vrednovanja obrazovno-vaspitiš ishoda. U toku ovih aktivnosti nastavnik treba da gradi takav odnos i atmosferu u kojoj se učenik neće osjećati kao neko kome se sudi i presuđuje, a nastavnik doživljava kao suprotstavljena strana, koji je tu samo da utvrdi znanje i zabilježi ocjenu. Uvijek treba izbjegavati stresne situacije i stanja.

Individualnost u vrednovanju obrazovno-vaspitiš ishoda podrazumijeva da se vrednovanje sprovodi individualno, posebno za svakog učenika, uzimajući u obzir njegove mogućnosti (sposobnosti), zainteresovanost za rad i sticanje znanja i vještina, trud koji ulaže pri učenju, uslove u kojima uči, znanje koje je postigao i vještine kojima je ovladao.

Permanentnost podrazumijeva kontinuirano praćenje rada i napredovanja svakog učenika posebno i njegovo motivisanje za učenje predmeta.

Vrednovanje obrazovno-vaspitiš ishoda ne treba da se svodi samo na puku provjeru znanja učenika, nego ga treba osmisliti tako da nastavnik u toku provjere sa učenikom utvrđuje nivo pređenog gradiva, razjasni pojmove i dileme koje učenik ima u okviru pojedinih tema, da učenik postavlja pitanja koja se tiču sticanje novih znanja, tj. produbljivanja znanje.

Podsticanje radoznalosti učenika i njegov osjećaj napredovanja u sticanju znanja i vještina su posebni izazovi sa kojima se susrijeću nastavnici u procesu nastave. Oni su od presudnog značaja za postizanje dobrih rezultata učenika i u direktnoj vezi su sa samoučenjem i motivisanjem učenika za učenje predmeta.

Provjera znanja i vještina učenika se postiže kroz usmeno ispitivanje učenika i pismenu provjeru znanja. Pismena provjera znanja se sprovodi kroz domaće zadatke, kontrolne vježbe, pismene zadatke itd.



Ocjenjivanje, koje rezultira opisnom ili brojčanom ocjenom, treba da bude rezultat svih elemenata koji se javljaju u vrednovanju obrazovno-vaspitnih ishoda. Dakle, krajnja ocjena, koja je reprezent vrednovanja obrazovno-vaspitnih ishoda svakog učenika pojedinačno, ne treba da bude puka aritmetička sredina provjere znanja učenika, nego mora da sadrži i druge elemente vrednovanja obrazovno-vaspitnih ishoda, tj. treba da predstavlja neku vrstu „pedagoške sredine“ koja pokazuje ukupno postignuće učenika.

Ocjenjivanje treba da bude javno tako da svaki učenik i njegovi roditelji, ne samo da treba da znaju ocjenu koju je učenik dobio, nego treba da budu upoznati i sa napredovanjem i svim nedostacima koje učenik ima u procesu učenja predmeta.

Konkretno, u cilju objektivnijeg i efikasnijeg ocjenjivanja potrebno je da nastavnici na nivou stručnog aktiva ishode učenja razvrstaju na minimalne ishode (I nivo zahtjeva), osnovne ishode (II nivo zahtjeva) i napredne ishode (III nivo zahtjeva).

Učenici koji ovladaju znanjima koja odgovaraju minimalnim ishodima učenja treba da budu ocijenjeni sa prelaznom ocjenom dovoljan 2. Većina učenika treba da teži sticanju znanja koja su navedena u okviru osnovnih ishoda pa i nastava treba da bude koncipirana tako da se ovaj cilj ostvari, a učenici budu ocijenjeni sa ocjenama dobar 3 ili vrlo dobar 4. Učenik će zaslužiti najveću ocjenu – odličan 5 ukoliko usvoji znanja koja nalažu napredni ishodi. Naravno, učenici koji zasluže ocjenu 3 ili 4 ili 5 moraju usvojiti i znanja koja nalažu ishodi nižeg nivoa zahtjevnosti.

U toku godine učenici rade četiri dvočasovna pismena zadatka. Nakon pismenoga zadatka, radi se ispravka, kojoj je posvećen jedan čas. Izbor zadataka treba da bude takav da među njima budu veoma laki, čija je sadržina određena u okviru minimalnih ishoda, standardni (zadaci srednje težine) čija sadržina odgovara osnovnim ishodima, kao i jedan teži zadatak čiji je nivo određen naprednim ishodima.

Kriterijumi ocjenjivanja izvode se iz ishoda programa i govore nam šta se očekuje od učenika da zna, razumije i/ili je sposoban da pokaže i uradi za određenu ocjenu. U našim školama počev od trećeg razreda za vrednovanje obrazovno-vaspitnih postignuća učenika koristi se numerička skala od 1 do 5. U pojedinim domenima moguće je relativno precizno dati kriterijume vrednovanja ponašanja/aktivnosti učenika.

Na primjer, aktivnost učenika i njegov rad na času:

dovoljan 2	Učenik se rijetko javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadatka, zna manji dio svojstava, samostalno ne zaključuje i ne uočava uzročno-posljedične veze.
dobar 3	Učenik se javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadatka, zna određeni dio svojstava i saopštava ih, nije samostalan u zaključivanju i ne uočava uzročno-posljedične veze.
vrlo dobar 4	Učenik se redovno javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadatka, dobro vlada činjenicama, ali nije uvijek samostalan pri izvođenju zaključaka ili uočavanja uzročno-posljedičnih veza.
odličan 5	Učenik se redovno javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadatka, uspješno vlada činjenicama, samostalan je pri izvođenju zaključaka ili uočavanja uzročno-posljedičnih veza.

Za domaće zadatke, izradu pismenih i kontrolnih zadataka, prezentacija i sl.

dovoljan 2	Samo po neki zadatak ima tačno rješenje, veći dio rješenja zadataka su nepotpuna, netačna i nepregledna, prezentacija je kratka sa malo sadržaja i djelimično daje odgovor na postavljeni zadatak.
dobar 3	Većina zadataka je riješena, provjere nijesu u potpunosti urađene, a zaključci su prisutni u manjoj mjeri, prezentacija je adekvatna sa odgovarajućom sadržinom, a zaključci nijesu potpuni.
vrlo dobar 4	Rješenja zadataka su skoro uvijek pregledna i tačna, provjera je urađena i zaključci su uglavnom jasno izvedeni, prezentacija je cjelovita sa uglavnom jasno izvedenim zaključcima.
odličan 5	Rješenja zadataka su pregledna i tačna, provjera je urađena i zaključci su jasno izvedeni, prezentacija je cjelovita sa jasno izvedenim zaključcima i uopštenim rješenjima.

Za domaći rad treba davati zadatke preko kojih se utvrđuje, ponavlja, povezuje, sistematizuje i produbljuje nastavno gradivo.

## I. USLOVI ZA REALIZACIJU PREDMETA (STRUČNA SPREMA)

### a) Resursi za realizaciju predmetnog programa

Prostor u kome se izvodi nastava (kabinet, učionica) treba da bude opremljen osnovnim geometrijskim priborom (lenjir, trougaoni lenjir, šestar), modelima geometrijskih tijela, aplikacijama sa prigodnim geometrijskim formama i formulama i drugim materijalom koji stvara matematički ambijent. Osim standardnih nastavnih sredstava u učionici bi trebalo da se nalazi (ili bar da bude stalno dostupan nastavniku) računar povezan sa projektorom.

Od literature potrebno je imati odgovarajuće udžbenike i zbirke zadataka. Od dostupne literature preporučujemo udžbenik *Linearna algebra i geometrija* čiji je autor Gojko Kalajdžić, izdavač Zavod za udžbenike Beograd i zbirku zadataka: *Linearna algebra i analitička geometrija* – zbirka riješenih zadataka za III razred MATEMATIČKE GIMNAZIJE čiji su autori V. Ilić, B. Marinković, B. Matić, izdavač Krug, Beograd. Preporučujemo da nastavnik povremeno koristi i druge izvore znanja npr. internet na kojem su dostupni mnogi sajtovi sa obiljem odgovarajućeg materijala, naročito za rad sa naprednim učenicima, kao i sajtovi sa grafičkim prezentacijama kojima se može olakšati usvajanje znanja.

### b) Profil i stručna sprema nastavnika

Nastavu može da realizuje profesor matematike, profesor matematike i informatike, diplomirani matematičar ili osoba koja je završila Prirodno-matematički fakultet – matematika u trajanju od najmanje četiri godine i da je tokom studija imala odgovarajući ispit iz Linearne algebre i analitičke geometrije.

Predmetni program Linearna algebra i analitička geometrija za III razred matematičke gimnazije izradila je komisija u sljedećem sastavu:

Prof. dr Izedin Krnić, predsjednik

Mirjana Pješčić, profesorica matematike, članica

Božidar Šćepanović, član

U izradi Predmetnog programa korišćen prethodno važeći Predmetni program za linernu algebru i analitičku geometriju kao i Predmetni program matematike srednjih stručnih škola, autora prof. dr Žarka Pavićevića, Nataša Vlahović, Lidije Lalović, Božidara Šćepanovića (za H).

Nacionalni savjet za obrazovanje na sjednici održanoj 23. jula 2020. godine, utvrdio je **Predmetni program LINEARNA ALGEBRA I ANALITIČKA GEOMETRIJA** za III razred matematičke gimnazije.