



CRNA GORA  
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

## **MATEMATIČKA GIMNAZIJA**

Predmetni program

### **NUMERIČKA MATEMATIKA**

IV razred

Podgorica

2020.

## SADRŽAJ

A. NAZIV PREDMETA .....	3
NUMERIČKA MATEMATIKA .....	3
B. ODREĐENJE PREDMETA .....	3
C. CILJEVI PREDMETA .....	3
D. POVEZANOST SA DRUGIM PREDMETIMA I MEĐUPREDMETNIM TEMAMA .....	4
E. OBRAZOVNO-VASPITNI ISHODI PREDMETA.....	5
IV razred .....	5
F. DIDAKTIČKE PREPORUKE ZA REALIZACIJU PREDMETA.....	8
G. PRILAGOĐAVANJE PROGRAMA DJECI SA POSEBNIM OBRAZOVNIM POTREBAMA I NADARENIM UČENICIMA.....	10
H. VREDNOVANJE OBRAZOVNO-VASPITNIH ISHODA.....	11
I. USLOVI ZA REALIZACIJU PREDMETA.....	16

## A. NAZIV PREDMETA

### NUMERIČKA MATEMATIKA

## B. ODREĐENJE PREDMETA

U mnogim oblastima savremene nauke i tehnike sve češće se dolazi do matematičkih zadataka čija se tačna rješenja ne mogu dobiti klasičnim matematičkim metodama ili se pak mogu dobiti, ali su pri tom toliko komplikovana da se praktično ne mogu upotrijebiti. Prirodno je što se, zbog toga, postavio problem izgradnje efikasnih metoda za nalaženje približnih rješenja takvih zadataka. S druge strane, veliki pomaci u nauci i tehnici omogućili su konstruisanja novih, izvanrednih sredstava za računanje. Zbog toga su se postavili zadaci upoređivanja, revidiranja i sistematizacije već postojećih i izgradnje novih metoda radi efikasnog korišćenja tih sredstava.

Navedeni razlozi su doveli do nastanka jedne posebne oblasti matematike, čiji je zadatak razrada metoda koja dovode do brojčanih rezultata, rješenja različitih zadataka analize, algebre, vjerovatnoće, statistike, geometrije itd. Ta oblast se naziva **numeričkom matematikom**.

Nastavni predmet Numerička matematika realizuje se u odjeljenjima matematičkih gimnazija sa 2 (dva) časa sedmično u IV razredu.

Razred	Sedmični broj časova	Ukupni broj časova	Obavezni dio (80–85%)	Otvoreni dio (15 do 20%)	Teorijska nastava (TN)	Vježbe i ostali vidovi
IV	2	66	56	10	30	36

**Napomena 1:** Predloženi fond časova za teoretsku nastavu (to je nastava kada se uvode novi pojmovi i sadržaji) i ostale vidove nastave su orijentaciono dati i oni mogu da budu veći ili manji za nekoliko časova.

## C. CILJEVI PREDMETA

Numerička matematika ima kao oblast proćavanja cijelu matematiku i njene primjene. Ona razvija sopstvenu teoriju i razrađuje sopstvene metode. Bitna karakteristika tih metoda je, po pravilu, rezultat u obliku broja. Često koristimo i termin numerička analiza, gdje nikako ne treba imati u vidu samo numeričke metode rješavanja zadataka klasične matematičke analize. Naprotiv, prije bi se moglo govoriti o numeričkim metodama analize, numeričkim metodama linearne algebre, numeričkim metodama geometrije, numeričkim metodama nelinearne algebre, numeričkim metodama statistike,...

Najčešći zadaci numeričke matematike ili numeričke analize u širem smislu su: aproksimacija skupova i funkcija u funkcionalnim prostorima i razrada racionalnih algoritama i metoda rješavanja zadataka. Dakle, numeričkoj analizi važni su: teorijski aspekt – razvoj odgovarajućih metoda i primijenjeni aspekt – veza sa praktičkim zadacima uz korišćenje savremene računске tehnike.

Ciljevi nastave numeričke matematike ostvaruju se kroz realizaciju i dostizanje saznanjih i procesnih ciljeva. Saznajni ciljevi obuhvataju znanja koja će učenik<sup>1</sup> steći kroz usvajanje matematičkih sadržaja

---

<sup>1</sup> Svi izrazi koji se u ovom materijalu koriste u muškom rodu obuhvataju iste izraze u ženskom rodu.

datih u programima, dok procesni ciljevi obuhvataju vještine i vrijednosti koje se razvijaju tokom i u procesu učenja.

Kroz saznajne ciljeve učenici treba da:

- usvoje znanja iz numeričke matematike koja čine temelj savremenog opšteg obrazovanja;
- usvoje znanja iz numeričke matematike koja su im potrebna za dalje školovanje;
- usvoje znanja približnog računanja brojevima i približnog diferenciranja, znanja iz interpolacije i približnog rješavanja jednačina i integrala;
- razumiju pravila i tvrđenja numeričke matematike;
- usvoje metode i algoritme numeričke matematike;
- ovladaju tehnikama modeliranja koje koriste numeričku matematiku pri rješavanju tekstualnih zadataka.

Kroz procesne ciljeve učenici treba da razvijaju:

- sposobnost mišljenja, zaključivanja i generaliziranja i matematičkog dokazivanja koji se grade u numeričkoj matematici;
- vještine i sposobnosti formulisanja problema;
- sposobnost rješavanja problema;
- vještine interpretacije podataka prikazanih dijagramima, tabelama ili grafikonima različitih vrsta koji se dobiju primjenom numeričke matematike;
- vještine korišćenja kalkulatora i nekih od matematičkih kompjuterskih programa (Microsoft Mathematics 4.0 ili GeoGebra ili ...)
- sposobnost da prepoznaju situacije u svakodnevnom životu u kojima se mogu primijeniti numerička matematička znanja;
- inovativnost i kreativno mišljenje;
- sposobnosti kritičkog mišljenja;
- kulturne, etičke, estetske i radne navike, kriterijume i sposobnosti.

## **D. POVEZANOST SA DRUGIM PREDMETIMA I MEĐUPREDMETNIM TEMAMA**

Kroz vezu numeričke matematike sa drugim predmetima i međupredmetnim temama iskazuje se svrha učenja numeričke matematike i izgrađuju temeljne kompetencije učenika za primjenu znanja i vještina u različitim domenima svakodnevnog života. Sa dostignućima tehnologije pred numeričkom matematikom su izazovi da obezbijedi alate za opis i analizu ideja u svim područjima ljudskih djelatnosti. Spregom matematičkih vještina i numeričke matematike uz jezičko-komunikacijske vještine učenici kreativno i jasno izrazavaju svoje ideje prilagođavajući se različitim zahtjevima i potrebama. Time se izgrađuje njihova socijalna pozicija, razvijaju kulturne, etičke i emocionalne vrijednosti u društvu.

Upotreba numeričke matematike i informaciono-komunikacionih tehnologija mogu se obraditi mnoge međupredmetne teme u okviru kojih se razvijaju: inicijativnost, upornost, postavljanje hipoteza, kreativan pristup u rješavanju zadataka i problema i razvoja preduzetništvo.

**Napomena:** Međupredmetne oblasti/teme obavezne su u svim nastavnim predmetima i nastavnicima su ih obavezni ostvarivati. Međupredmetne oblasti/teme su sadržaji koji omogućavaju da se u opšteobrazovni kurikulum uključe određeni ciljevi i sadržaji obrazovanja koji nijesu dio formalnih

disciplina ili pojedinih predmeta, ili koji su po strukturi interdisciplinarni. Ovi sadržaji doprinose integrativnome pristupu opšteg obrazovanja i u većoj mjeri povezuju sadržaje pojedinih predmeta.

## E. OBRAZOVNO-VASPITNI ISHODI PREDMETA

### IV razred

#### Obrazovno-vaspitni ishod 1

#### RAČUNANJE SA PRIBLIŽNIM BROJEVIMA

*Na kraju učenja učenik će moći da primjenjuje računanje sa približnim brojevima u rješavanju različitih praktičnih zadataka.*

#### Ishodi učenja

*Tokom učenja učenik će moći da:*

- usvoji pojam približnog broja;
- zapiše realni broj sa fiksiranom decimalnom tačkom;
- zapiše realni broj sa sa pokretnom decimalnom tačkom;
- usvaja pravila zaokruživanja brojeva;
- izračuna apsolutnu, relativnu i procentualnu grešku za zbir, razliku, proizvod i količnik približnih brojeva;
- usvoji pojam granice apsolutne i relativne greške i primjenju ga na konkretne zadatke;
- upoznaje različite izvore grešaka;
- odredi značajne, sigurne i tačne cifre broja i koristi ih u zadacima;
- primijeni postupak za određivanje direktne i obrnute greške za datu funkciju.

#### Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda:

**a) Sadržaji/pojmovi:** pojam približnog broja; decimalni i eksponencijalni (normalizovani) zapis realnog broja; zaokruživanje približnih brojeva, pravila zaokruživanja; izvori grešaka: matematički model, početni podaci, metoda rada, zaokruživanje; apsolutna, relativna i procentualna greška približnog broja; značajne i sigurne cifre broja; direktan i obrnut problem greške; ocjena greške nekih karakterističnih funkcija.

#### b) Aktivnosti učenja

Učenici:

- nalaze primjere iz okruženja u kojima se koriste približni brojevi;
- na konkretnim primjerima izračunavaju apsolutnu, relativnu i procentualnu grešku;
- nalaze približnu vrijednost i grešku izračunavanja obima i površine trougla (pravougaonika, trapeza) ako su poznate približne vrijednosti stranica;
- nalaze približnu vrijednost i grešku izračunavanja za površinu i zapreminu kvadra ako su poznate približne vrijednosti njegovih dimenzija;
- rješavaju zadatke u kojima se određuje: granica apsolutne greške iz broja sigurnih decimala, granica relativne greške iz broja sigurnih cifara, broj sigurnih cifara iz granice relativne greške;
- daju praktične primjere u kojima se koristi računanje sa približnim vrijednostima;
- svoj rad provjeravaju pomoću kalkulatora ili u nekom od kompjuterskih programa (Microsoft Mathematics 4.0 ili GeoGebra ili neki drugi program).

**c) Broj časova realizacije (okvirno): 11 časova.**

**Obrazovno-vaspitni ishod 2**  
**PRIBLIŽNO DIFERENCIRANJE**

*Na kraju učenja učenik će moći da primjenjuju diferencijal funkcije za približna izračunavanja.*

**Ishodi učenja**

*Tokom učenja učenik će moći da:*

- usvoji pojam linearne aproksimacije diferencijabilne funkcije;
- upozna glavni dio priraštaja funkcije;
- primijeni diferencijal funkcije za približna izračunavanja;
- zna približne formule za neke karakteristične funkcije (korijen,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x \dots$ ).

**Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda:**

**a) Sadržaji/pojmovi:** teorema o linearnoj aproksimaciji diferencijabilne funkcije; glavni dio priraštaja funkcije; pojam diferencijala funkcije; primjena diferencijala funkcije na približno izračunavanje vrijednosti funkcije; približne formule (korijen,  $\sin x$ ,  $\cos x \dots$ ).

**b) Aktivnosti učenja**

Učenici:

- nalaze približnu vrijednost funkcije u tački koristeći diferencijal funkcije;
- nalaze približnu vrijednost koeficijenta smjera tangente na krivu;
- nalaze približnu vrijednost brzine kretanja tijela;
- daju praktične primjere u kojima se koriste približno diferenciranje;
- osmišljavaju kratke prezentacije iz historije matematike;
- u svom radu, po potrebi, primjenjuju kalkulator ili neki od kompjuterskih programa (Microsoft Mathematics 4.0 ili GeoGebra ili neki drugi program).

**c) Broj časova realizacije (okvirno): 7 časova.**

**Obrazovno-vaspitni ishod 3**

**INTERPOLACIJA**

*Na kraju učenja učenik će moći da primjenjuju interpolacione polinome za prikazivanje funkcija.*

**Ishodi učenja**

*Tokom učenja učenik će moći da:*

- upozna pojam mreže i mrežne funkcije;
- objasni aproksimacije i interpolacije funkcije zadate na ekvidistantnoj i neekvidistantnoj mreži;
- zna da izračuna grešku interpolacionog polinoma u tački koja nije čvor;
- prepozna prednosti i nedostatke svakog interpolacionog polinoma;
- zna da interpolira funkciju zadatu u tačkama mreže;
- zna da napiše algoritam i program na nekom od programskih jezika za Lagranžov i Njutnov interpolacione polinome.

**Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda:**

**a) Sadržaji/pojmovi:** opšti zadatak interpolacije; egzistencija i jedinstvenost interpolacionog polinoma; greška interpolacionog polinoma; lagranžov interpolacioni polinom; podijeljene razlike, tablica podijeljenih razlika; Njutnov interpolacioni polinom sa podijeljenim razlikama na neekvidistantnoj mreži; konačne razlike unaprijed i unazad, tablica konačnih razlika; Njutnov interpolacioni polinom sa konačnim razlikama unaprijed na ekvidistantnoj mreži; Njutnov interpolacioni polinom sa konačnim razlikama unazad na ekvidistantnoj mreži.

**b) Aktivnosti učenja**

Učenici:

- navode primjere linearne interpolacije funkcije;
- nalaze Njutnov interpolacioni polinom koristeći se tablicom sa podijeljenim i konačnim razlikama;
- primjenjuju interpolacione polinome za prikazivanje funkcija zadatih analitičkim izrazima ili tabelama;
- na konkretnim primjerima izračunava grešku interpolacije;
- koriste gotove softverske pakete za interpolaciju.

**c) Broj časova realizacije (okvirno): 15 časova.**

**Obrazovno-vaspitni ishod 4**

**PRIBLIŽNO RJEŠAVANJE JEDNAČINA**

*Na kraju učenja učenik će moći da nalazi približna rješenja jednačina sa zadatom tačnošću i nalazi grešku rješenja ako je zadat broj iteracija.*

**Ishodi učenja**

*Tokom učenja učenik će moći da:*

- stekne naviku algoritamskog postupka u postavljanju, rješavanju i interpretaciji zadataka;
- primjenjuje linearne aproksimacije funkcije u definisanju metoda: tangente, regula falsi, sječice;
- ispita uslove konvergencije numeričkih metoda;
- primijeni svaku od metoda predviđenih u sadržaju na konkretnim jednačinama;
- izračuna grešku dobijenog približnog rješenja;
- odredi broj iteracija metode ako je zadata granica greške približnog rješenja.

**Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda:**

**a) Sadržaji/pojmovi:** nelinearne jednačine; egzistencija rješenja; lokalizacija i izolovanje rješenja; pojam približnog rješenja; metoda polovljenja (bisekcije) intervala; metoda tangenti; metoda regula falsi i metoda sječice; kombinovana metoda (tangente i sječice); metoda proste iteracije.

**b) Aktivnosti učenja**

Učenici:

- crtaju grafike funkcija kao pomoć za utvrđivanje egzistencije i lokalizacije rješenja jednačine na datom odsječku;
- koriste svojstva neprekidnih i monotonih funkcija za utvrđivanje egzistencije i lokalizacije rješenja jednačine;
- provjeravaju ispunjavanje uslova konvergencije iterativnih nizova;
- nalaze približna rješenja jednačina sa zadatom tačnošću;
- nalazi grešku rješenja ako je zadat broj iteracija;
- daju praktične primjere u kojima se koriste približna rješavanja jednačina;
- u svom radu, po potrebi, primjenjuju kalkulator ili neki od kompjuterskih programa (Microsoft Mathematics 4.0 ili GeoGebra ili neki drugi program).

**c) Broj časova realizacije (okvirno): 13 časova.**

**Obrazovno-vaspitni ishod 5**

**PRIBLIŽNA INTEGRACIJA**

*Na kraju učenja učenik će moći da izračuna približnu vrijednost određenog integrala.*

**Ishodi učenja**

*Tokom učenja učenik će moći da:*

- se upozna sa pojmom približnog računanja određenog integrala;
- primijeni svaku od formula na konkretnim primjerima;
- izračuna grešku pri primjeni svake od kvadrature formula;

**Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda:**

**a) Sadržaji/pojmovi:** kvadrature formule; kvadrature formule koje neposredno slijede iz definicije određenog integrala; formule pravougaonika; trapezna formula; Simpsonova formula.

**b) Aktivnosti učenja**

Učenici:

- uočavaju vezu između podintegralne funkcije i vrijednosti određenog integrala;
- određuju približnu vrijednost određenog integrala i izračunavaju dobijeno rješenje ako je zadat broj čvorova kvadrature formule;
- određuju broj čvorova kvadrature formule ako je zadata tačnost sa kojom treba izračunati određeni integral;
- utvrđuju odnos reda grešaka u kvadrature formulama;
- utvrđuju da Simpsonova formula daje tačnu vrijednost integrala za polinome prvog, drugog i trećeg stepena;
- daju praktične primjere u kojima se koriste približna računanja integrala;
- u svom radu, po potrebi, primjenjuju kalkulator ili neki od kompjuterskih programa (Microsoft Mathematics 4.0 ili GeoGebra ili neki drugi program).

**d) Broj časova realizacije (okvirno): 7 časova.**

## F. DIDAKTIČKE PREPORUKE ZA REALIZACIJU PREDMETA

Za MATEMATIČKU GIMNAZIJU program predmeta Numerička matematika je koncipiran tako da učenicima daje mogućnost ovladavanja osnovnim znanjima i vještinama iz numeričke matematike, koje su im neophodne za uspješno obavljanje poslova pri zaposlenju i/ili za nastavak njihovog školovanja. Teme su birane tako da čine osnovu matematičkog obrazovanja.

Prilikom realizacije programa posebnu pažnju treba pokloniti motivima na kojima su građene numerički matematički pojmovi, teorije i metode, objašnjavanju njihove suštine, geometrijskoj interpretaciji i njihovoj primjeni u drugim predmetnim oblastima i rješavanju praktičnih zadataka.

Sadržaja nastavnog gradiva i usvajanje tehnika treba obrađivati na najjednostavnijim primjerima.

**Tema:** *Računanje sa približnim brojevima*

Učenici:

- zapisuju približne brojeve u decimalnom i eksponencijalnom (normiranom) obliku;
- računaju sa približnim brojevima, određuju apsolutnu, relativnu i procentualnu grešku;
- razlikuju značajne, sigurne i tačne cifre;
- znaju pravila zaokruživanja brojeva;
- razlikuju različite izvore grešaka.



**Tema: Približno diferenciranje**

Učenici:

- direktno ocjenjuju grešku približne vrijednosti funkcije;
- rješavaju obratan problem ocjene greške približne vrijednosti funkcije;
- razumiju linearnu aproksimaciju diferencijabilne funkcije (geometrijska interpretacija);
- koriste diferencijal funkcije za približna izračunavanja vrijednosti funkcije;
- nalaze približnu vrijednost brzine kretanja tijela;
- rješavaju praktične primjere u kojima se koristi približno diferenciranje.

**Tema: Interpolacija**

Učenici:

- treba da razumiju opšti zadatak interpolacije i grešku takve aproksimacije;
- zapisuju Lagranžov interpolacioni polinom;
- zapisuju tablicu sa podijeljenim razlikama i na osnovu nje odgovarajući Njutnov interpolacioni polinom;
- zapisuju tablice sa konačnim razlikama (unaprijed i unazad) i na osnovu njih odgovarajuće Njutnove polinome;
- određuju greške za interpolacione polinome.

**Tema: Približno rješavanje jednačina**

Učenici:

- crtaju grafike funkcija, koriste svojstva neprekidnih i diferencijabilnih funkcija za lokalizaciju rješenja jednačine;
- primjenjuju metode: polovljenja intervala, tangente, regula-falsi, sječice, kombinovane metode i proste iteracije za nalaženje približnog rješenja jednačina;
- ispituju konvergenciju iterativnih nizova za približno rješavanje jednačina;
- određuju grešku približnog rješenja jednačine;
- određuju broj iteracija ako je data greška približnog rješenja.

**Tema: Približna integracija**

Učenici:

- usvajaju pojam kvadraturnih formula;
- primjenjuju formule: pravougaonika, trapeza i Simpsona za izračunavanje približne vrijednosti određenog integrala;
- određuju grešku kvadrature formule;
- određuju broj čvorova ako je data greška sa kojom treba izračunati određeni integral.

Sa učenicima treba raditi zadatke u kojima pišu algoritme za interpolacione polinome, približno rješavanje jednačina i približno izračunavanje određenih integrala. Za algoritme učenici treba da pišu programe na nekom od programskih jezika.

Učenici, zajedno sa nastavnikom, takođe, treba da matematički modeliraju neke pojave i procese, a zatim izvede pravilne zaključke.

Kad je god moguće, u svakoj nastavnoj jedinici navesti neke detalje iz istorije numeričke matematike i matematike uopšte.

Uz preporuku odgovarajuće literature, nastavnici učenicima mogu predložiti teme iz istorije matematike, posebno numeričke matematike, kao seminarske radove, koje će oni prezentovati ostalim učenicima.

Boljim učenicama treba postavljati složenije zadatke za čije rješavanje treba kombinovati aritmetičko-algebarska znanja, znanja iz geomerije i matematičke analize. Ovo bi doprinijelo da ti učenici prodube svoja matematička znanja i vještine.

## **G. PRILAGOĐAVANJE PROGRAMA DJECI SA POSEBNIM OBRAZOVNIM POTREBAMA I NADARENIM UČENICIMA**

### **a) Prilagođavanje programa djeci sa posebnim obrazovnim potrebama**

Zakon o vaspitanju i obrazovanju djece sa posebnim obrazovnim potrebama, članom 12 definiše način prilagođavanja nastave i učenja učenicima sa posebnim obrazovnim potrebama koji se školuju po Programu uz obezbjeđivanje dodatnih uslova, pomagala i stručne pomoći u gimnazijskom obrazovanju.

U zavisnosti od smetnji i teškoća u razvoju, sposobnosti i potreba učenika, individualni program omogućava mijenjanje, prilagođavanje i individualizaciju metodike kojom se sadržaji realizuju.

Primjer: za učenika bez ostatka vida, škola treba da u saradnji s Resursnim centrom Podgorica obezbijedi udžbenike na Brajevom pismu, elektronske udžbenike, omogući siguran i bezbjedan prostor, bez barijera i sl.

### **b) Prilagođavanje programa nadarenim učenicima**

Za nadarene učenike nastavnik prilagođava program numeričke matematike na način što u okviru redovnog programa odabira zadatke i sadržaje koji će produbiti i proširiti njihovo znanje.

Navedeno nastavnik može da realizuje tako što će tim učenicima i učenicima koji pokazuju sklonost ka učenju matematike u okviru redovne i dodatne nastave, predložiti:

- rješavanje odabranih zadataka iz programa koji se uči po nastavnom programu predmeta Numerička matematika;
- da pripreme i prezentuju zanimljive zadatke i priče o matematičarima iz pojedinih tema koje se nalaze u programu;
- grupni rad na rješavanju zadataka i problema različite složenosti;
- male istraživačke projekte.

## H. VREDNOVANJE OBRAZOVNO-VASPITNIH ISHODA

Vrednovanje obrazovno-vaspitnih ishoda je važna komponenta nastave u okviru predmeta Numerička matematika i ono se mora kontinuirano sprovoditi u toku izvođenja nastave. Pored vrednovanja uspjeha učenika ono omogućava nastavniku samoevaluaciju, na osnovu koje može da koriguje svoj pedagoški rad.

Kako obrazovno-vaspitni ishodi učenja obuhvataju:

- međusobno poštovanje i povjerenje učenika i nastavnika;
- individualnost;
- permanentnost;
- aktivnost učenika u utvrđivanju i sticanju novih znanja u nastavnom procesu;
- podsticanje radoznalosti učenika i njegov osjećaj napredovanja;
- motivisanje učenika za učenje numeričke matematike, i uopšte učenje, kroz razvijanje i osposobljavanje učenika za samoučenje;
- provjeru znanja i vještina;
- ocjenjivanje;
- upoznavanje učenika i roditelja sa postignućem učenika,

to se *vrednovanje obrazovno-vaspitnih ishoda* učenika mora zasnivati na navedenim elementima i mora se posmatrati kao jedna dinamička cjelina.

Tokom nastave nastavnik *sa učenicima* treba da izgradi odnos *poštovanja i povjerenja*. Ovo je posebno značajno kada se sprovede aktivnosti koje se odnose na vrednovanje obrazovno-vaspitnih ishoda. U toku ovih aktivnosti nastavnik treba da gradi takav odnos i atmosferu u kojoj se učenik neće osjećati kao neko kome se sudi i presuđuje, a nastavnik doživljava kao suprotstavljena strana, koji je tu samo da utvrdi znanje i zabilježi ocjenu. Uvijek treba izbjegavati stresne situacije i stanja.

*Individualnost* u vrednovanju obrazovno-vaspitnih ishoda podrazumijeva da se vrednovanje sprovodi individualno, posebno za svakog učenika. Vrednuju se učenikove mogućnosti (sposobnosti), učenikova zainteresovanost za rad i sticanje znanja i vještina, trud koji ulaže pri učenju, uslovi u kojima uči, znanje koje je postigao, vještine kojima je ovladao itd.

*Permanentnost* podrazumijeva kontinuirano praćenje rada i napredovanja svakog učenika posebno i njegovu motivaciju za učenje numeričke matematike.

Kriterijumi ocjenjivanja izvode se iz ishoda programa i govore nam šta se očekuje od učenika da zna, razumije i/ili je sposoban da pokaže i uradi.

Vrednovanje obrazovno-vaspitnih ishoda ne treba da se svodi samo na puku provjeru znanja učenika, nego ga treba osmisliti tako da u toku provjere učenik *utvrđuje* pređeno gradivo, sa nastavnikom *razjašnjava* pojmove i dileme koje ima u okviru pojedinih tema, postavlja pitanja koja se tiču sticanja novih znanja, tj. *produbljuje svoje znanje*.

*Podsticanje radoznalosti* učenika i njegov osjećaj napredovanja u sticanju znanja i vještina su posebni izazovi sa kojima se susrijeću nastavnici u procesu nastave. Oni su od presudnog značaja za postizanje dobrih rezultata učenika. Oni su i u direktnoj vezi i sa *samoučenjem* i motivisanjem učenika za učenje numeričke matematike.

*Ocjenjivanje* treba da bude javno. Svaki učenik i njegovi roditelji, ne samo da treba da znaju ocjenu koju je učenik dobio, nego treba da budu upoznati i sa napredovanjem i svim nedostacima koje učenik ima u procesu učenja.

#### **a) Elementi praćenja učenika u nastavi**

##### **Znanje**

Znanje učenika se sastoji od *deklarativnog i proceduralnog znanja*.

*Deklarativno znanje* obuhvata znanje i razumjevanje osnovnih pojmova numeričke matematike. Ovim znanjem učenici rješavaju proste zadatke. Ovo znanje predstavlja osnovni nivo znanja učenika.

*Proceduralno znanje* obuhvata ne samo znanje kako se nešto radi nego i zašto se nešto radi. Ono obuhvata razumjevanje formula i teorema i njihovu primjenu za rješavanje zadataka različite težine. Obuhvata primjenu formula, pravila, tehnika računanja, algoritama i tvrđenja u rješavanju zadataka realnog života i složenijih problema.

*Deklarativno i proceduralno znanje* kod učenika razvijaju matematičko i logičko mišljenje i zaključivanje, upotrebu matematičkog jezika i simbola, razvijaju sposobnost generalizovanja i dokazivanja, kritičkog mišljenja, matematičke kulture. Pomoću ovih znanja kod učenika se izgrađuju i formiraju matematičke vještine koje su im potrebne za funkcionalno korišćenje matematikih znanja.

##### **Vještine**

Vještine u nastavi numeričke matematike čine: *kognitivne vještine, komunikacione i socijalno-emocionalne vještine i praktične-psihomotorne vještine*.

*Kognitivne vještine* predstavljaju sposobnost učenika da samostalno stiče znanje, analizira uslove zadatka, upoređuje dobijene rezultate, povezuje različite sadržaje, izvodi pravilne zaključke. Ove vještine omogućavaju učenicima da razvijaju kreativnost kroz rješavanje različitih praktičnih zadataka i problema, kao i primjenu znanja-aparata numeričke matematike u rješavanju zadataka iz međupredmetnih sadržaja.

*Komunikacione i socijalno-emocionalne vještine* obuhvataju sposobnost učenika da jasno, precizno i sistematično izloži sadržaje (rješenje zadataka, svoje ideje, dokaze tvrđenja, prezentacije itd) usmeno i/ili pismeno. Ove vještine obuhvataju i spremnost učenika na saradnju, prihvatanja drugačijeg mišljenja i ideja, timski rad, spremnost da koristi argumentaciju itd.

*Praktične-psihomotorne vještine* sadrže vještinu korišćenja pribora za crtanje, tabela i raznog didaktičkog i drugog materijala koji bi se koristio u nastavi numeričke matematike.

##### **Odnos učenika prema radu i obavezama u školi**

Praćenje i vrednovanje *odnosa učenika prema radu i obavezama u školi*, pored inicijativnosti, odgovornosti i samokontrole učenika, obuhvata i *aktivnost učenika na časovima redovne nastave i njihovu odgovornost prema obavezama iz nastave numeričke matematike (domaći rad, dopunska i dodatna nastava, seminarski rad, eksterna kontrola, izrada didaktičkog materijala itd)*. Ovo praćenje treba da bude *permanentno*. Njegove pokazatelje nastavnik treba da analizira i u skaldu sa njima da vrši korekciju svoje nastave i odnos prema učenicima.

## b) Kriterijumi praćenja i ocjenjivanja

U cilju objektivnijeg i efikasnijeg ocjenjivanja, potrebno je da nastavnici na nivou stručnog aktiva ishode učenja razvrstaju na: *osnovni nivo*, *srednji nivo* i *viši nivo*. **Učenik koji ima srednji nivo znanja mora vladati i osnovnim nivoom znanja, a učenici koji imaju viši nivo znanja moraju vladati i osnovnim i srednjim nivoom znanja.**

Učenici koji ovladaju znanjima koja odgovaraju *osnovnom nivou* ishoda učenja treba da budu ocijenjeni sa prelaznom ocjenom *dovoljan 2 ili dobar 3*. Većina učenika morala bi da teži sticanju znanja koja su navedena u okviru srednjeg *nivoa*, pa i nastava treba da bude koncipirana tako da se ovaj cilj ostvari, a učenici koji ovladaju ovim nivoom znanja se ocjenjuju sa ocjenama *vrlo dobar 4*. Učenik će zaslužiti najveću ocjenu *odličan 5* ukoliko ovlada znanjima i vještinama koja su sadržana u *višem nivou*.

### Kriterijumi ocjenjivanja znanja

Osnovni nivo	Srednji nivo	Viši nivo
<p><b>Učenik:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– je usvojio pojmove: približni broj, računanje sa približnim brojevima, greška (apsolutna, relativna i procentualna), granica apsolutne i relativne greške, značajne, sigurne i tačne cifre... ;</li> <li>– pravilno upotrebljava osnovna tvrđenja i termine iz numeričke matematike;</li> <li>– zna rješavati prostije zadatke iz približnog diferenciranja, interpolacije, rješavanja jednačina i približne integracije. Na primjer: <ul style="list-style-type: none"> <li>* metodom polovljenja intervala odrediti realna rješenja jednačine <math>x^3 - x + 1 = 0</math> sa tačnošću <math>\epsilon = 10^{-4}</math>,</li> <li>* koristeći formulu pravougaonika za <math>n=10</math> izračunati <math display="block">\int_{0,6}^{1,4} \frac{\sqrt{x^2 + 5} dx}{2x + \sqrt{x^2 + 0,5}}</math> </li> <li>* ocijeniti grešku dobijenog rezultata td;</li> </ul> </li> <li>– zna matematički modelirati i nalaziti rješenja prostijih zadataka iz svakodnevnog života;</li> <li>– zna da napiše i objasni algoritamske korake u rješavanju prostijih numeričkih zadataka.</li> </ul>	<p><b>Učenik:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– može sa ponuđenim informacijama nešto uraditi: analizirati ih, uporediti po nekom kriterijumu, povezati, transformisati, izvesti zaključak, primijeniti.... Na primjer, zna matematički modelirati zadatke iz praktičnog života, riješiti ih numeričkim metodama, dobijene rezultate analizirati i na osnovu njih donositi zaključke;</li> <li>– uočava prednosti i nedostatke numeričkih metoda (upoređuje Lagranžeove i Njutnove interpolacione polinome, približnog rješavanja jednačina, približne integracije ...). Na primjer: <ul style="list-style-type: none"> <li>* Metodom tetive odrediti realna rješenja jednačine <math>x^2 + 4 \sin x - 1 = 0</math> sa tačnošću <math>\epsilon = 10^{-3}</math>,</li> <li>* koristeći trapeznu formulu za <math>n=6</math> izračunati <math display="block">\int_{1,3}^{2,1} \frac{\sin(x^2 - 1) dx}{2\sqrt{x}}</math> </li> <li>* ocijeniti grešku dobijenog rezultata.</li> </ul> </li> </ul>	<p><b>Učenik:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– može od postojećih informacija stvoriti nešto novo u odnosu na njih same. Na primjer, sposobnost da matematički modelira složenije pojave i procese iz praktičnog života, da ih analizira, upoređuje, povezuje, objašnjava i vrednuje informacije i podatke u različitim oblicima;</li> <li>– rješava složene zadatke, na primjer: <ul style="list-style-type: none"> <li>* Metodom proste iteracije odrediti realna rješenja jednačine <math>\ln x =  \cos 2x \sin 2x </math> sa tačnošću <math>\epsilon = 10^{-4}</math>,</li> <li>* koristeći Simpsonovu formulu izračunati <math display="block">\int_0^1 e^{-x^2} dx</math> sa greškom <math>\epsilon = 10^{-3}</math>.</li> </ul> </li> </ul>

Opisna ili brojana ocjena treba da bude rezultat svih elemenata koji se javljaju u vrednovanju obrazovno-vaspitnih ishoda. Ona ne treba da bude puka aritmetička sredina provjere znanja učenika, nego mora da sadrži i druge elemente vrednovanja obrazovno-vaspitnih ishoda: *aktivnost učenika na časovima redovne nastave, domaći rad, dopunska i dodatna nastava, seminarski rad, eksterna kontrola, izrada didaktičkog materijala itd.* Ovo praćenje treba da bude *permanentno*, tj. treba da predstavlja neku vrstu „pedagoške sredine“ koja pokazuje ukupno postignuće učenika.

U pojedinim domenima moguće je relativno precizno dati kriterijume vrednovanja ponašanja/aktivnosti učenika.

Primjer – aktivnost učenika i njegov rad na času:

<b>dovoljan</b> 2	Učenik se rijetko javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadatka, zna manji dio svojstava, samostalno ne zaključuje i ne uočava uzročno-posljedične veze.
<b>dobar</b> 3	Učenik se javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadatka, zna određeni dio svojstava i saopštava ih, nije samostalan u zaključivanju i ne uočava uzročno-posljedične veze.
<b>vrlodobar</b> 4	Učenik se redovno javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadatka, dobro vlada činjenicama, ali nije uvijek samostalan pri izvođenju zaključaka ili uočavanju uzročno-posljedičnih veza.
<b>odličan</b> 5	Učenik se redovno javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadatka, uspješno vlada činjenicama, samostalan je pri izvođenju zaključaka ili uočavanju uzročno-posljedičnih veza.

Primjer – domaći zadaci, izrada pismenih i kontrolnih zadataka, prezentacije i sl.

<b>dovoljan</b> 2	Samo po neki zadatak ima tačno rješenje, veći dio rješenja zadataka su nepotpuna, netačna i nepregledna, prezentacija je kratka sa malo sadržaja i djelimično daje odgovor na postavljeni zadatak.
<b>dobar</b> 3	Većina zadataka je riješena, provjere nijesu u potpunosti urađene, a zaključci su prisutni u manjoj mjeri, prezentacija je adekvatna sa odgovarajućom sadržinom, a zaključci nijesu potpuni.
<b>vrlodobar</b> 4	Rješenja zadataka su skoro uvijek pregledna i tačna, provjera je urađena i zaključci su uglavnom jasno izvedeni, prezentacija je cjelovita sa uglavnom jasno izvedenim zaključcima.
<b>odličan</b> 5	Rješenja zadataka su pregledna i tačna, provjera je urađena i zaključci su jasno izvedeni, prezentacija je cjelovita sa jasno izvedenim zaključcima i uopštava rješenja.

Domaći zadaci po obimu, sadržaju, težini i zanimljivosti treba da budu takvi da se, po pravilu, mogu uraditi za vrijeme do 30 minuta.

Za domaći rad treba davati zadatke preko kojih se utvrđuje, ponavlja, povezuje, sistematizuje i produbljuje nastavno gradivo.

### c) Obaveze učenika

Obaveze učenika u nastavi numeričke matematike su:

- redovno praćenje nastave,
- poštovanje pravila rada na času,
- saradnja i dobra komunikacija, timski rad,
- učestvovanje u svim aktivnostima na času,
- izrada domaćih zadataka,
- izrada kontrolnih zadataka i testova,
- izrada pismenih zadataka,
- izrada seminarskih radova,
- učešće u projektima,
- učestvovanje u eksternim testiranjima-provjerama,
- učestvovanje u međunarodnim testiranjima.

### d) Oblici praćenja i provjeravanja

*Oblici praćenja i provjeravanja znanja*

Pored znanja definicija, teorema i razumijevanje zadatka, predmet praćenja znanja sadrži i praćenje njihovih *kognitivnih vještina*: način rješavanja zadataka, sposobnost analize, upoređivanja, povezivanja i zaključivanja, kao i primjena i transformacija znanja: sposobnost rješavanja problema, kreativnost i kritičko mišljenje.

Znanje iz numeričke matematike se provjerava usmenim ispitivanjem, provjerom domaćih zadataka, kratkim testovima i pismenim zadacima. Rade se dva pismena zadatka, svaki u trajanju dva časa, s još po dva časa koji su predviđeni za ispravku. Među zadacima treba da budu laki zadaci, čiju sadržinu određuje rubrika **osnovni nivo**, standardni zadaci (zadaci srednje težine), čiju sadržinu određuje rubrika **srednji nivo**, i jedan teži zadatak, čiju sadržinu određuje rubrika **viši nivo**.

*Oblici praćenja i procjenjivanja vještina*

Kod učenika se prate i procjenjuju vještine upotrebe numeričkih matematičkih znanja na rješavanje kako čisto matematičkih zadataka, tako i zadataka međupredmetnih oblasti i iz realnog života.

Kada se procjenjuju vještine, treba ustanoviti da li učenik:

- može smisljeno da riješava zadatke, i kog nivoa;
- koliko je u stanju da pravilno izvodi zaključak iz rješenja zadatka;
- može da izdvaja, upoređuje, klasifikuje i sortira, tj. obradi podatke iz realnog života i matematički ih modelira;
- primijeni znanja i vještine iz numeričke matematičke na neke nove situacije kako bi riješio/riješila problem;
- koristeći vlastito znanja, može samostalno formulisati interesantne zadatke;
- jasno i precizno izlažu matematičke sadržaje;
- uspješno izlaže/presentuje rezultata timskog rada;
- predlaže relnu ocjenu ostalim učenicima;
- pravilno procjenjuje svoje znanje.

Nastavnik treba da da formira portfolio učenika koji će mu poslužiti da osmisli i planira rad sa tim učenicom.

## I. USLOVI ZA REALIZACIJU PREDMETA

### a) Resursi za realizaciju predmetnog programa

Nastavni program predmeta Numerička matematika treba da prati odgovarajući udžbenik, zbirka zadataka i metodska uputstva za njihovo korišćenje. Svi oni treba da budu koncipirani tako da omoguće efikasno postignuće ishoda učenja. Udžbenik i zbirka zadataka treba da budu pregledni, u jezičkom i matematičkom smislu korektni, savremeni, čitljivi, zanimljivi i grafički dobro urađeni. Udžbenik treba da bude napisan tako da nastavniku zadaje redosljed lekcija, ukazuje na motivaciju za uvođenje novog pojma, nudi inicijalne primjere. U udžbeniku i zbirci treba da se nađu zahtjevnije teme, koje će nadareni učenici obrađivati u sklopu dodatne nastave, ili u sekcijama ili samostalno, kod kuće. Ove djelove u udžbeniku treba posebno naznačiti.

Ostala matematička literatura je od velike pomoći učeniku. Služi im za produblјivanje njihovog znanja. Ova literatura će nastavnicima omogućiti da razvijaju kreativnost i inovativnost.

Resursi za realizaciju predmetnog programa treba da čine: kabinet za matematiku, računarska učionica-kabinet za informatiku, školska biblioteka, biblioteka programa, animacija itd.

Kabinet za matematiku treba da posjeduje:

- pribor za crtanje – školski trougao, lenjir, šestar;
- modele geometrijskih tijela;
- malu biblioteku matematičkih knjiga i časopisa.

Računarska učionica-kabinet za informatiku treba da posjeduje:

- personalne računare;
- biblioteku matematičkih programa;
- animacije (filmove) matematičkog sadržaja;
- Internet konekciju;
- pristup nekim od matematičkih sajtova.

Školska biblioteka treba da posjeduje udžbenike i zbirke za svaki razred, te zbirke koje su namijenjene popularizaciji matematike i pripremi učenika za takmičenje.

### b) Profil i stručna sprema nastavnika

Nastavu predmeta Numerička matematika u MATEMATIČKOJ GIMNAZIJI treba da realizuje predmetni nastavnik, koji može biti profesor matematike, profesor matematike i informatike, diplomirani matematičar ili osoba koja je na fakultetu za obrazovanje nastavnika završila dvopredmetnu grupu u okviru koje je jedan od predmeta matematika i inženjeri matematike (svi 240 ECTS), kao i lica koja su stekla Stepen specijaliste (Spec. Sci) usmjerenja matematika ili matematika i informatika (svi 240 ECTS), ili Stepen Magistra (MSc) usmjerenja matematika ili matematika i informatika (svi 300 ECTS).

## LITERATURA

U izradi Predmetnog programa korišćen je prethodno važeći Predmetni program matematičke gimnazije zasnovan na ciljevima i predmetni programi srednjih stručnih škola zasnovani na ishodima.



Pored naših u izradi Predmetnog programa konsultovani su i predmetni programi iz država u regionu: Slovenija, Hrvatska, Bosna i Hercegovina i Srbija.

Predmetni program **NUMERIČKA MATEMATIKA** za IV razred matematičke gimnazije, izradila je Komisija u sljedećem sastavu:

Prof dr Žarko Pavićević, predsjednik

Prof. dr Sanja Jančić Rašović, član

Doc. dr Božidar Popović, član

Nacionalni savjet za obrazovanje na sjednici održanoj 23. jula 2020. godine, utvrdio je **Predmetni program NUMERIČKA MATEMATIKA** za IV razred matematičke gimnazije.