

CRNA GORA

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

Predmetni program

**UVOD U KOMBINATORIKU I TEORIJU BROJEVA**

Izborni predmet za VII, VIII ili IX razred osnovne škole

Podgorica

2018.

**Sadržaj**

[**A.** **NAZIV PREDMETA** 3](#_Toc493587195)

[**B.** **ODREĐENJE PREDMETA** 3](#_Toc493587196)

[**C.** **CILJEVI PREDMETA** 3](#_Toc493587197)

[**D.** **POVEZANOST S DRUGIM PREDMETIMA I MEĐUPREDMETNIM TEMAMA** 4](#_Toc493587198)

[**E.** **OBRAZOVNO-VASPITNI ISHODI PREDMETA** 4](#_Toc493587199)

[**F.** **DIDAKTIČKE PREPORUKE ZA REALIZACIJU PREDMETA**](#_Toc493587200) 6

[**G.** **PRILAGOĐAVANJE PROGRAMA DJECI S POSEBNIM OBRAZOVNIM POTREBAMA I NADARENIM UČENICIMA** 7](#_Toc493587201)

[**H.** **VREDNOVANJE OBRAZOVNO-VASPITNIH ISHODA**](#_Toc493587202) 7

[**I.** **USLOVI ZA REALIZACIJU PREDMETA** 9](#_Toc493587203)

1. **NAZIV PREDMETA**

**UVOD U KOMBINATORIKU I TEORIJU BROJEVA**

1. **ODREĐENJE PREDMETA**

Od davnina su brojevi čovjekov neizbježni pratilac. Pojava osnovnih pojmova i razvoj **Kombinatorike i teorije brojeva** tekao je paralelno sa razvojem drugih matematičkih disciplina (algebre, geometrije, matematičke analize, teorije vjerovatnoće, matematičke statistike itd.) s kojima su tijesno povezane**.**

Kombinatorika je oblast matematike koja se bavi izučavanjem mogućih rasporeda, metoda za prebrojavanje i pravila grupisanja elemenata, najčešće, konačnih skupova. Posmatranje konačnih skupova nam otvara više mogućnosti da od njihovih elemenata, nižući ih na različite načine, dobijamo različite rasporede od elemenata početnog skupa koje zovemo kombinatorne konfiguracije. Cilj kombinatorike je izučavanje kombinatornih konfiguracija, posebno pitanja njihovih postojanja i načina građenja i rješavanje zadataka prebrojavanja.

Teorija brojeva (aritmetika) jedna je od najstarijih grana matematike koja se prvenstveno bavi izučavanjem svojstava cijelih brojeva (djeljivost, rastavljanje brojeva na proste činioce, rješavanje jednačina u skupu cijelih brojeva itd.). Kao posljedica rješavanja i uopštavanja problema iz teorije brojeva nastali su mnogi djelovi savremene matematike. Karl Fridrih Gaus (1777 – 1855) koji je autor mnogih važnih otkrića u matematici, rekao je: "Matematika je kraljica nauka, a teorija brojeva je kraljica matematike."

Izborni predmet **Uvod u kombinatoriku i teorija brojeva[[1]](#footnote-1)** izučava se u VII, VIII ili IX razredu, sedmično po jedan čas. Ovaj izborni predmet je jednogodišnji i nije vezan za razred, pa može biti ponuđen učenicima[[2]](#footnote-2) sva tri razreda i može se formirati grupa od učenika različitih razreda.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Razred | Sedmični broj časova | Ukupni broj časova | Obavezni dio  (80-85%) | Otvoreni dio  (15 do 20%) | Teorijska nastava  (TN) | Vježbe i ostali vidovi |
| VII | 1 | 34 | 29 | 5 | 14 | 15 |
| VIII | 1 | 34 | 29 | 5 | 14 | 15 |
| IX | 1 | 31 | 27 | 4 | 14 | 13 |

1. **CILJEVI PREDMETA**

Ciljevi nastave izbornog predmeta **Uvod u kombinatoriku i teoriju brojeva**, kao i ciljevi **Matematike** ostvaruju se kroz realizaciju i dostizanje saznajnih i procesnih ciljeva. Saznajni ciljevi obuhvataju znanja koja će učenik steći kroz usvajanje matematičkih sadržaja datih u programima, dok procesni ciljevi obuhvataju vještine i vrijednosti koje se razvijaju tokom i u procesu učenja.

Kroz saznajne ciljeve učenici treba da:

* usvoje matematička znanja koja čine temelj savremenog opšteg obrazovanja;
* usvoje matematička znanja koja su im potrebna za dalje školovanje;
* usvoje osnovna znanja iz kombinatorike i teorije brojeva;
* ovladaju tehnikom računanja;
* razumiju matematička pravila i tvrđenja;
* usvoje matematičku simboliku;
* razumiju matematički jezik;
* ovladaju tehnikama matematičkog modeliranja pri rješavanju tekstualnih zadataka.

Kroz procesne ciljeve učenici treba da razvijaju:

* sposobnost logičkog mišljenja, zaključivanja, generalizovanja i matematičkog dokazivanja;
* vještine i sposobnosti formulisanja problema;
* sposobnost rješavanja problema;
* vještine interpretacije podataka prikazanih dijagramima, tabelama ili grafikonima različitih vrsta;
* sposobnost da prepoznaju situacije u svakodnevnom životu u kojima se mogu primijeniti znanja iz Kombinatorike i elementarne teorija brojeva;
* inovativnost i kreativno mišljenje;
* sposobnost kritičkog mišljenja;
* kulturne, etičke, estetske i radne navike, kriterijume i sposobnosti.

1. **POVEZANOST SA DRUGIM PREDMETIMA I MEĐUPREDMETNIM TEMAMA**

Primjena **Kombinatorike i teorije brojeva** je široka jer se koristiu teoriji vjerovatnoće, statistici, ekonomici, fizici, hemiji, biologiji i mnogim predmetima iz prirodnie i društvene grupe.

Kad su u pitanju međupredmetne teme izražena je upotreba informaciono-komunikacionih tehnologija u nastavi, a kroz razvoj inicijative, upornosti, kreativnog pristupa rješavanju problema i postavljanju hipoteza, Kombinatorika i teorija brojeva duboko je inkorporirana u razvoj preduzetništva.

1. **OBRAZOVNO-VASPITNI ISHODI PREDMETA**

|  |
| --- |
| **Obrazovno-vaspitni ishod 1**  **KOMBINATORIKA**  ***Na kraju učenja učenik će moći da riješi kombinatorne zadatke metodama prebrojavanja i primjenom Dirihleovog principa.*** |
| **Ishodi učenja**  *Tokom učenja učenik će moći da:*   * usvoji osnovne pojmove iz kombinatorike; * objasni pojam kombinatorike, osnovna pravila i metode koje se koriste pri rješavanju kombinatornih zadataka; * objasni prebrojavanje pomoću stabala (grafička interpretacija); * objasni osnovna pravila prebrojavanja (pravilo zbira i pravilo proizvoda); * objasni Dirihleov princip i riješi tekstualne zadatke njegovom primjenom; * odredi broj i zapiše rasporede različitih elemenata nekog skupa u kojima je poredak bitan; * odredi broj na koliko se načina iz skupa od n elemenata može formirati njegov podskup od k (k<n) elemenata i primjeni pravilo zapisivanja (poredak nije bitan); * riješi tekstualne zadatke različitih stepena složenosti. |
| **Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda**:   1. **Sadržaji/pojmovi**   Uvod;  Osnovna pravila prebrojavanja;  Dirihleov princip;  Uređeni i neuređeni izbori elemenata.   1. **Aktivnosti učenja**   Učenici:   * grafički pomoću stabla i na drugi način predstavljaju kombinatorne probleme, prebrojavaju i zapisuju moguće rasporede objekata; * rješavaju kombinatorne zadatke tako što samostalno biraju moguće varijante uz korišćenje pravila zbira i proizvoda; * prepoznaju različite kombinatorne rasporede, zapisuju ih, prebrojavaju i izračunavaju njihov broj; * prilikom rješavanja školskih i domaćih zadataka trude se da sistematski nabrajaju i zapisuju različite varijante kombinatornih rasporeda; * znanja iz kombinatorike sistematišu na način što u najvećoj mjeri samostalno rješavaju zadatke iz nje.  1. **Broj časova za realizaciju (okvirno): 18 časova** |

|  |
| --- |
| **Obrazovno-vaspitni ishod 2**  **ELEMENTARNA TEORIJA BROJEVA**  ***Na kraju učenja učenik će moći da primjeni stavove i algoritme elementarne teorije brojeva.*** |
| **Ishodi učenja**  *Tokom učenja učenik će moći da:*   * objasni pojam djeljivosti na skupu Z (prethodno ponoviti djeljivost na skupu N0); * primjeni osnovne osobine djeljivosti i dijeljenje sa ostatkom u skupu cijelih brojeva; * usvoji Euklidov algoritam; * odredi NZD cijelih brojeva a i b pomoću Euklidovog algoritama i to dovede u vezu sa NZS za date brojeve; * primjeni znanja o prostim brojevima, objasni teoremu koja se zove **osnovni stav aritmetike** i još neka svojstva u vezi sa prostim brojevima; * riješi linearne Diofantove jednačine; * objasni i primjeni pojam kongruencije i zna njena osnovna svojstva; * primjeni svojstva kongruencije po modulu **m** pri riješavanju raznih zadataka u vezi sa cijelim brojevima; * rješi tekstualne zadatke. |
| **Didaktičke preporuke za realizaciju obrazovno-vaspitnog ishoda**:   1. **Sadržaji/pojmovi:**   Djeljivost cijelih brojeva;  Prosti brojevi;  Diofantove jednačine;  Kongruencije.   1. **Aktivnosti učenja**   Učenici:   * primjenjuju u redovnoj nastavi stečena znanja o djeljivosti i proširuju ih novim znanjima kroz rješavanje zadataka iz djeljivosti; * dijele u skupu Z sa ostatkom; * pomoću Euklidovog algoritama određuju NZD za date cijele brojeve a,b i rješavaju zadatke primjenom NZD i NZS; * ispisuju redom sve proste brojeve manje od nekog broja i rješavaju zadatke primjenom osobina prostih brojeva; * određuju klase kongruencije po pojedinim modulima 3, 4, 5 ‒ predstavljaju ih grafički i rješavaju druge zadatke primjenom svojstava kongruencije; * sistematišu usvojena znanja iz teorije brojeva na taj način što uglavnom samostalno rješavaju zadatke u skladu s navedenim ishodima učenja.  1. **Broj časova za realizaciju** **(okvirno): 16 časova** |

1. **DIDAKTIČKE PREPORUKE ZA REALIZACIJU PREDMETA**

Učenici treba da se upoznaju sa osnovnim elementima **kombinatorike,** prije svega, sa problemima prebrojavanja kao njenom osnovnom preokupacijom koja je pogodna za uvođenje učenika u ovu matematičku disciplinu; i da rješavajući kombinatorne zadatke, izgrađuju naviku sistematizacije kod prebrojavanja objekata i umijeće za rješavanje nestandardnih zadataka.

Preporučujemo da se kao model za demonstriranje različitih kombinatornih rasporeda koriste: kocke za igru "čovječe ne ljuti se", novčić (pismo, glava), žetoni, kuglice različitih boja i sl.

Smatramo da prilikom rješavanja zadataka učenici treba da koriste pogodno odabrane grafičke interpretacije, shematske, tabelarne prikaze i sl.

Zapisivanje različitih kombinatornih rasporeda i izračunavanje njihovog broja treba uglavnom demonstrirati na skupovima koji imaju do pet elemenata.

Dirihleov princip na početku saopštiti u šaljivoj formi: "Ako je u *n* kaveza smješteno više od *n* zečeva onda se nekom kavezu nalaze bar dva zeca".

Novi teoretski materijal preporučujemo da se gotovo uvijek izučava nakon rješavanja nekoliko pogodno odabranih zadataka.

Ukoliko nastavnik procijeni da je za učenike visoko zahtjevno usvajanje **elementarne teorije brojeva** na skupu Z, predlažemo da to uradi na skupu N0.

Učenici treba da se šire upoznaju sa osnovnim pojmovima iz teorije brojeva, kao što su: djeljivost u skupu cijelih brojeva, prosti i složeni brojevi, osnovne metode za nalaženje cjelobrojnih rješenja nekih jednačina i kongruencije.

Izvodljivost operacije dijeljenja u skupu *Z* je osnova velikog dijela teorije brojeva, s obzirom da skup *Z* nije zatvoren u odnosu na operaciju dijeljenja.

Preporučujemo da se proširi poznavanje kriterijuma djeljivosti sa kriterijumima djeljivosti brojevima 7, 11, 13.

Što se tiče prostih brojeva, treba pokušati potpuno ili djelimično odgovoriti na sljedeća pitanja: koji prirodni brojevi mogu biti prosti, da li postoji najveći prost broj, kako naći sve proste brojeve manje od nekog broja?

Kod Diofantovih jednačina treba tražiti rješenja koja pripadaju skupu cijelih brojeva ili nekom njegovom podskupu, odnosno dokazati ili opovrgnuti postojanje takvih rješenja.

Preporučujemo da se prilikom usvajanja kongruencija koristi odgovarajuća grafička interpretacija koja povezuje cjelobrojnu pravu sa kružnom linijom.

Obrazovno-vaspitni ishodi treba da budu obrađeni tako da učenici mogu samostalno nastaviti njihovo savladavanje, bilo u cjelini bilo u djelovima prema svojim individualnim sposobnostima. Takođe, treba im predlagati dobar izbor zadataka za samostalan rad.

**G.**  **PRILAGOĐAVANJE PROGRAMA DJECI SA POSEBNIM OBRAZOVNIM POTREBAMA I NADARENIM UČENICIMA**

**a. Prilagođavanje programa djeci sa posebnim obrazovnim potrebama**

Članom 11 Zakona o vaspitanju i obrazovanju djece sa posebnim obrazovnim potrebama propisano je da se u zavisnosti od smetnji i teškoća u razvoju, kao i od individualnih sklonosti i potreba djece obrazovni programi, pored ostalog mogu:

a) modifikovati skraćivanjem ili proširivanjem sadržaja predmetnog programa;

b) prilagođavati mijenjanjem metodike kojom se sadržaji predmetnog programa realizuju.

Član 16 istog Zakona propisuje da je škola, odnosno resursni centar dužan da, po pravilu, u roku od 30 dana po upisu djeteta, donese individualni razvojno-obrazovni program za dijete sa posebnim obrazovnim potrebama (IROP), u saradnji sa roditeljem i o tome obavijesti Zavod za školstvo, Centar za stručno obrazovanje i Ispitni centar.

**b. Prilagođavanje programa nadarenim učenicima**

*Strategijom za razvoj i podršku darovitim učenicima* *(2015‒2019)* predviđen je specifični cilj (obogaćivanje kurikuluma kao jedan od modela podsticanja darovitosti u školi). U tom cilju je i urađen ovaj program kako bi izašao u susret učenicima koji su više zainteresovani za matematiku.

**H.** **VREDNOVANJE OBRAZOVNO – VASPITNIH ISHODA**

Vrednovanje obrazovno-vaspitnih ishoda je važna komponenta nastave izbornog predmeta **Uvod u** k**ombinatoriku i teoriju brojeva** kao i **Matematike** i ono se mora kontinuirano sprovoditi u toku izvođenja nastave. Pored vrednovanja uspjeha učenika, omogućava nastavniku samoevaluaciju, na osnovu koje može da koriguje svoj pedagoški rad.

Vrednovanje obrazovno-vaspitnih ishoda obuhvata:

* poštovanje i povjerenje između učenika i nastavnika;
* individualnost;
* permanentnost;
* utvrđivanje i sticanje novih znanja kroz aktivnosti učenika u nastavnom procesu;
* podsticanje radoznalosti učenika i njegov osjećaj napredovanja;
* motivisanje učenika za učenje matematike kroz razvijanje i osposobljavanje učenika za samoučenje;
* provjeru znanja i vještina;
* ocjenjivanje;
* upoznavanje učenika i roditelja sa postignućem učenika.

Tokom nastave nastavnik treba da izgradi odnos *poštovanja i povjerenja sa učenicima*. Ovo je posebno značajno kada se sprovode aktivnosti koje se odnose na vrednovanje obrazovno-vaspitnih ishoda. U toku ovih aktivnosti nastavnik treba da gradi takav odnos i atmosferu u kojoj se učenik neće osjećati kao neko kome se sudi i presuđuje, a nastavnik doživljava kao suprotstavljena strana, koji je tu samo da utvrdi znanje i zabilježi ocjenu. Uvijek treba izbjegavati stresne situacije i stanja.

*Individualnost* u vrednovanju obrazovno-vaspitnih ishoda podrazumijeva da se vrednovanje sprovodi individualno, posebno za svakog učenika na način što se vrednuju njegove mogućnosti (sposobnosti), zainteresovanost za rad i sticanje znanja i vještina, trud koji ulaže pri učenju, uslovi u kojima uči, znanje koje je postigao, vještine kojima je ovladao itd.

*Permanentnost* podrazumijeva kontinuirano praćenje rada i napredovanja svakog učenika posebno i njegovu motivaciju za učenje Matematike.

Vrednovanje obrazovno-vaspitnih ishoda ne treba da se svodi samo na puku provjeru znanja učenika, nego ga treba osmisliti tako da u toku provjere učenik *utvrđuje* pređeno gradivo, sa nastavnikom *razjašnjava* pojmove i dileme koje ima u okviru pojedinih tema, postavlja pitanja koja se tiču sticanja novih znanja, tj*. produbljuje svoje znanje* itd.

*Podsticanje radoznalosti* učenika i njegov osjećaj napredovanja u sticanju znanja i vještina su posebni izazovi sa kojima se susrijeću nastavnici u procesu nastave. Oni su od presudnog značaja za postizanje dobrih rezultata učenika. Oni su i u direktnoj vezi i sa *samoučenjem* i motivisanjem učenika za učenje izbornog predmeta **Uvod u** **kombinatoriku i teoriju brojeva**.

*Provjera znanja i vještina* učenika se ostvaruje usmenim i pisanim putem. Pismena provjera znanja se sprovodi kroz domaće zadatke, kontrolne vježbe – na kraju svakog polugodišta radi se po jedna kontrolna vježba.

*Ocjenjivanje*, koje rezultira brojčanom ocjenom, treba da bude rezultat svih elemenata koji se javljaju u vrednovanju obrazovno-vaspitnih ishoda. Dakle, krajnja ocjena, koja je reprezent vrednovanja obrazovno-vaspitnih ishoda svakog učenika pojedinačno, ne treba da bude puka aritmetička sredina provjere znanja učenika, nego mora da sadrži i druge elemente vrednovanja obrazovno-vaspitnih ishoda, tj. treba da predstavlja neku vrstu „pedagoške sredine“ koja pokazuje ukupno postignuće učenika.

Ocjenjivanje treba da bude javno tako da svaki učenik i njegovi roditelji, ne samo da treba da znaju ocjenu koju je učenik dobio, nego i da budu upoznati i sa napredovanjem i svim nedostacima koje učenik ima u procesu učenja matematike.

U cilju objektivnijeg i efikasnijeg ocjenjivanja, potrebno je da nastavnici na nivou stručnog aktiva ishode učenja razvrstaju na *minimalne ishode*, *osnovne ishode* i *napredne ishode*.

Učenici koji ovladaju znanjima koja odgovaraju *minimalnim* *ishodima* učenjatreba da budu ocijenjeni sa prelaznom ocjenom *dovoljan 2.* Većina učenika morala bi da teži sticanju znanja koja su navedena u okviru *osnovnih ishoda*, pa i nastava treba da bude koncipirana tako da se ovaj cilj ostvari, a učenici ocijenjeni sa ocjenama *dobar 3* ili *vrlo dobar 4*. Učenik će zaslužiti najvišu ocjenu ukoliko usvoji znanja koja nalažu *napredni ishodi - odličan 5*.

Kriterijumi ocjenjivanja izvode se iz ishoda programa i govore šta se očekuje od učenika da zna, razumije i/ili je sposoban da pokaže i uradi za određenu ocjenu. Za vrednovanje obrazovno-vaspitnih postignuća učenika koristi se numerička skala od 1 do 5.

Na primjer, aktivnost učenika i njegov rad na času:

|  |  |
| --- | --- |
| **dovoljan 2** | Učenik se rijetko javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadataka, zna manji dio svojstava, samostalno ne zaključuje i ne uočava uzročno-posljedične veze. |
| **dobar 3** | Učenik se javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadatka, zna određeni dio svojstava i saopštava ih, nije samostalan u zaključivanju i ne uočava uzročno-posljedične veze. |
| **vrlo dobar 4** | Učenik se redovno javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadatka, dobro vlada činjenicama, ali nije uvijek samostalan pri izvođenju zaključaka ili uočavanja uzročno-posljedičnih veza. |
| **odličan 5** | Učenik se redovno javlja da odgovori na postavljeno pitanje ili učestvuje u rješavanju postavljenog zadatka, uspješno vlada činjenicama, samostalan je pri izvođenju zaključaka ili uočavanja uzročno-posljedičnih veza. |

Za domaće zadatke, izradu pismenih i kontrolnih zadataka, prezentacija i sl.

|  |  |
| --- | --- |
| **dovoljan 2** | Samo po neki zadatak ima tačno rješenje, veći dio rješenja zadataka su nepotpuna, netačna i nepregledna, prezentacija je kratka sa malo sadržaja i djelimično daje odgovor na postavljeni zadatak. |
| **dobar 3** | Većina zadataka je riješena, provjere nijesu u potpunosti urađene, a zaključci su prisutni u manjoj mjeri, prezentacija je adekvatna sa odgovarajućom sadržinom, a zaključci nijesu potpuni. |
| **vrlo dobar 4** | Rješenja zadataka su skoro uvijek pregledna i tačna, provjera je urađena i zaključci su uglavnom jasno izvedeni, prezentacija je cjelovita sa uglavnom jasno izvedenim zaključcima. |
| **odličan 5** | Rješenja zadataka su pregledna i tačna, provjera je urađena i zaključci su jasno izvedeni, prezentacija je cjelovita sa jasno izvedenim zaključcima i uopštenim rješenjima. |

Domaći zadaci po obimu, sadržaju, težini i zanimljivosti treba da budu takvi da se, po pravilu, mogu uraditi za vrijeme od jednog školskog časa. Za domaći rad treba davati zadatke preko kojih se utvrđuje, ponavlja, povezuje, sistematizuje i produbljuje nastavno gradivo.

**I. USLOVI ZA REALIZACIJU PREDMETA (STRUČNA SPREMA I LITERATURA)**

**PROFIL I STRUČNA SPREMA NASTAVNIKA**

Regulisano Zakonom o osnovnom obrazovanju i vaspitanju i Pravilnikom o profilu obrazovanja nastavnika predmetne nastave.

Predmetni program ***UVOD U KOMBINATORIKU I TEORIJU BROJEVA*** treba da prate odgovarajući udžbenik i zbirka zadataka. Oni treba da budu koncipirani tako da omoguće efikasno postignuće ishoda učenja.

Program izbornog predmeta **UVOD U KOMBINATORIKU I TEORIJU BROJEVA** priagodila je novoj metodologiji pisanja programa Komisija u sastavu:

Miodrag Lalić, predsjednik

Nikola Radojičić, član

U izradi predmetnog programa korišćeni su:

*Predmetni program****Matematička radionica - KOMBINATORIKA I ELEMENTARNA TEORIJA BROJEVA*** *(2005), Metodološko uputstvo za pisanje predmetnih programa zasnovanih na ishodima učenja, 2017.* i važeća zakonska regulativa.

Nacionalni savjet za obrazovanje (III saziv) na 5. sjednici, održanoj 16. jula 2018. godine, utvrdio je predmetni program **UVOD U KOMBINATORIKU I TEORIJU BROJEVA** kao izborni predmet za VII, VIII ili IX razred osnovne škole.

1. U prethodnom periodu od 2005. godine ovaj izborni predmet se zvao Matematička radionica – Kombinatorika i elementarna teorija brojeva. [↑](#footnote-ref-1)
2. Svi izrazi koji se u ovom dokumentu koriste u muškom rodu obuhvataju iste izraze u ženskom rodu. [↑](#footnote-ref-2)