CRNA GORA
VLADA CRNE GORE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

NAŠA ŠKOLA
Matematika i nadareni/e učenici/e

$$|a| = \begin{cases} \max\{-a, a\} \\ \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \geq 0 \end{cases} \\ a \operatorname{sgn} a \end{cases}$$

FOUNDATION OPEN SOCIETY INSTITUTE
PREDSTAVNIŠTVO CRNA GORA

Podgorica,
2007.

CRNA GORA
VLADA CRNE GORE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

NAŠA ŠKOLA

Matematika i nadareni/e učenici/e

FOUNDATION OPEN SOCIETY INSTITUTE
PREDSTAVNIŠTVO CRNA GORA

Podgorica
2007.

NAŠA ŠKOLA Matematika i nadareni/e učenici/e

Izdavač: Zavod za školstvo

Urednik: dr Dragan Bogojević

Pripremili: Miljan Vujošević, Milonja Ojdanić i Miodrag Lalić

Dizajn i tehnička priprema: Nevena Čabrilo

Redakcija: Božidar Šćepanović, Miodrag Vučeljić, Ljubomir Kovačević i Nevena Čabrilo

Lektura: Jasmina Radunović

Štampa: 3M Makarije Podgorica

Tiraž: 500 primjeraka

Podgorica 2007.

CIP – Каталогизација у публикацији
Централна народна библиотека Црне Горе, Цетиње

376. 1 – 056. 45 : 51

Naša škola: matematika i nadareni/e učenici/e
/ [pripremili Miljan Vujošević, Milonja Ojdanić i
Miodrag Lalić]. – Podgorica : Zavod za školstvo,
2007. (Podgorica : 3M Makarije). – 60 str. ; 25 cm

Na vrhu nasl. str. : Crna Gora, Vlada Crne Gore. –
Podatak o priređivačima uzet iz impresuma. –
Tiraž 500

ISBM 978 – 86 – 85553 - 39 - 4

а) Надарени ученици – математика
COBISS.CG – ID 12270352

Poštovani/e kolege i koleginice,

Pred vama je još jedno izdanje publikacije »Naša škola« Zavoda za školstvo. Nastala je kao odgovor na potrebe školske prakse, s namjerom da se nadarenim učenicima/ama posveti više pažnje i pomogne nastavnicima/ama u realizaciji nastave matematike.

U okviru publikacije je dat veliki broj zadataka koji su bili na takmičenjima učenika/ca osnovnih škola u posljednjih deset godina. Njima su pokrivene sve oblasti predviđene obrazovnim programom matematike za osnovnu školu: algebra i aritmetika, geometrija i logika sa kombinatorikom.

Posebno se vodilo računa o izboru metoda i strategija za rad sa učenicima/ama koji pokazuju smisao za ovaj predmet. Namjera nam je da ukažemo kako se kroz rad u sekcijama i dodatnoj nastavi mogu proširiti znanja i postignuća učenika/ca iz ovog predmeta.

Želja nam je da ovako koncipirana publikacija pruži podršku i bude od koristi nastavnicima/ama u radu sa učenicima/ama koje/i pokazuju sklonost i interesovanje za ovaj predmet. Nadamo se da ćemo vam na ovaj način pomoći da lakše prepoznate takve učenike/ce, razvijate njihove individualne potencijale i podstakneta njihova dodatna interesovanja za matematiku. Nastavnici/e je takođe mogu koristiti za pripremanje učenika/ca za naredna takmičenja.

Pošto iskustvo pokazuje da se radu sa nadarenom djecom ne poklanja dovoljno pažnje, ovom problematikom bavićemo se mnogo više ubuduće.

S poštovanjem,

D I R E K T O R

D Bogojević

dr Dragan Bogojević

S A D R Ž A J

1. RAD SA NADARENIM UČENICIMA / AMA

1.1. Metode i oblici rada

Nastava kao složen i dinamičan proces, neprestano pokreće nova i zanimljiva pitanja. Usljed tradicionalnih pristupa i čestih predrasuda ova pitanja su naročito izražena kod nastave matematike. Postoji mnogo razloga (na koje ovom prilikom nećemo ukazivati), zbog kojih u nastavi ovog predmeta dolazi do povremenih teškoća, pa su i postignuća učenika[1] niža nego u drugim oblastima.

Zbog specifičnosti predmeta, nastava matematike zahtijeva od nastavnika[2] dobro poznavanje metodike, kako se ne bi pretvorila u težak i neinterensantan predmet za većinu učenika, što je, nažalost, čest slučaj. Međutim, učenicima koji vole ovaj predmet, većina nastavnika omogućava da se detaljnije i dublje upoznaju sa ljepotama matematike. Najčešće se to ostvaruje na časovima dodatne nastave ili matematičke sekcije. Ovo su specifični oblici nastave i zahtijevaju puno angažovanje nastavnika.

Prema mišljenju psihologa, u ukupnoj populaciji nadarenost je zastupljena sa 2-3%. Poznati švajcarski psiholog Pijaže smatra da su osnovne mentalne strukture rezultat interakcije jedinke i njene sredine, nasljeđa i iskustva, sazrijevanja i učenja.

Prva sistematska i temeljna proučavanja nadarenih učenika u svijetu započeo je Luis Terman sa saradnicima tzv. longitudinalnim studijama, počev od 1921. godine. U različitom ekonomsko-socijalnom miljeu, nailazimo na različite definicije nadarenosti. Najčešće korišćena i naučno prihvatljiva definicija nadarenosti, temelji se na postignućima učenika. **Pod nadarenošću podrazumijevamo osobine učenika koje omogućavaju ostvarivanje izrazito natprosječnih postignuća u jednoj ili više oblasti ljudskih djelatnosti.**

Otkrivanje i prepoznavanje nadarenih učenika je složen, i stručno, i etički odgovoran zadatak. Izuzetno je značajno stvaranje ambijenta koji stimuliše nadarenu djecu da iskažu svoje intelektualne sposobnosti. Primjetno je da se talentovanoj djeci u našem društvu, još uvijek, ne poklanja dovoljno pažnje. Neophodno je aktuelizovati problematiku nadarenosti i iskoristiti postojeći zakonski osnov za organizovanje rada sa nadarenim učenicima[3].

Nastavnike treba osposobljavati da u svojim sredinama prepoznaju nadarene učenike, ali isto tako i da pruže maksimalnu podršku razvoju individualnih potencijala učenika.

Iskusni nastavnici lako prepoznaju učenike koji posjeduju matematičke sposobnosti, ali i pored toga, tokom školovanja, jedan broj djece ostaje nezapažen. Radu sa nadarenim učenicima treba pristupati planski, sa diferenciranim programima za prošireni rad u istraživačkim radionicama, pri čemu se vodi računa o individualnim osobinama i potencijalima učenika.

U praksi najčešće srećemo dva pitanja:

1) Koje osobine karakterišu učenike koji ispoljavaju **smisao za matamatiku?**
2) Kako kod učenika razviti **sposobnosti za matematiku?**

[1] U daljem tekstu podrazumijeva se učenika/ca
[2] U daljem tekstu podrazumijeva se nastavnika/ce
[3] U daljem tekstu podrazumijeva se učenicima/ama

Smisao za matematiku pokazuju učenici koji umiju da:
- postavljaju smislena pitanja;
- na različite načine rješavaju zadatke;
- pokazuju spremnost i upornost u rješavanju zadataka;
- precizno koriste matematičku simboliku.

Matematičku sposobnost kod učenika razvijamo tako što ih kroz različite oblike rada učimo kako da rješavaju probleme.

1.2. Prošireni dio nastavnih aktivnosti

Plan devetogodišnje osnovne škole, pored redovne nastave, predviđa i prošireni dio nastavnih aktivnosti. Prošireni dio nastavnog plana čine:

- Slobodne aktivnosti i fakultativna nastava;
- Pomoć djeci sa posebnim potrebama (nadarena djeca i djeca sa smetnjama u razvoju);
- Dopunska nastava;
- Dodatna nastava.

Dopunska nastava se organizuje za učenike koji tokom redovne nastave nijesu u stanju da usvoje znanja na nivou minimalnih zahtjeva programskih ciljeva, i ona nije predmet našeg interesovanja.

1.3. Dodatna nastava

Pod dodatnom nastavom podrazumijevamo rad sa učenicima koji pokazuju želju da se dublje upoznaju sa ovim predmetom. Preko dodatne nastave, rada u sekcijama, učešća na takmičenjima pojačava se i produbljuje znanje učenika stečeno na časovima redovne nastave. Svaki oblik proširenih aktivnosti ima svoje specifičnosti u smislu razvijanja interesovanja za učenje.

Osnovni ciljevi dodatne nastave su:
- proširivanje i produbljivanje stečenih znanja,
- razvijanje interesovanja učenika za matematiku,
- razvijanje matematičkih sposobnosti učenika,
- podsticanje na samostalno bavljenje matematikom,
- podsticanje učenika da razvijaju stvaralačke sposobnosti.

Za uspješno izvođenje dodatne nastave potrebno je:
- postojanje fleksibilnog orijentacionog programa rada,
- obezbijediti potrebnu literaturu, nastavna sredstva i pristup posebnim izvorima znanja,
- odabrati zadatke koji se odlikuju tematskom i problemskom raznovrsnošću,
- da nastavnici osavremene metodiku rada u dodatnoj nastavi, podrobnije prostudiraju određenu materiju, ali i da pojačaju rad sa nadarenim učenicima,
- osposobiti nastavnike da prepoznaju nadarene učenike.

Na časovima dodatne nastave rad se u principu organizuje sa učenicima jednog razreda, na nivou grupa. Grupe ne mogu biti previše brojne. Zadatak nastavnika je da utvrdi kriterijume za formiranje grupa. Prilikom selekcije grupa pažnju treba posvetiti, intelektualnim karakteristikama učenika i njihovim željama. Treba jasno ustanoviti obim i kvalitet znanja kojima učenici raspolažu, želju za rješavanje problema, i istrajnost koja se manifestuje ostvarivanjem definisanog cilja. Nijedna od ove tri komponente pojedinačno nije dovoljna za postizanje dobrih rezultata, ali sve zajedno, čine dobru podlogu za uspješno bavljenje matematikom.

1.4. Matematičke sekcije

Razvijanje i produbljivanje interesovanja za izučavanje matematike može se ostvariti i u okviru matematičke sekcije. Na sekcijama se obrađuju različita poglavlja matematike. Svi učenici koji vole matematiku mogu biti članovi matematičke sekcije. Prilikom rada u sekciji, obaveze nastavnika su veće, jer treba osmisliti zanimljiv program, koji odgovara učenicima različitog uzrasta, a samim tim i različitog obrazovnog nivoa. Jasno je da nastavnik mora obratiti posebnu pažnju ne samo na izbor sadržaja, nego i na metodički pristup.

Dobro osmišljen i sistematski vođen čas, omogućava utvrđivanje znanja stečenih na časovima redovne nastave, proširuje obrazovni nivo učenika i upoznaje ih sa zanimljivostima iz istorije matematike, odnosno sa razvijanjem pojedinih matematičkih ideja.

Često se u praksi poistovjećuju dodatna nastava i matematička sekcija. Prednost rada na časovima dodatne nastave je velika, ali i rad u okviru matematičkih sekcija, posebno u školama sa manjim brojem učenika je veoma koristan.

Na ovim časovima učenike treba posmatrati kao male istraživače, ili naučnike koji slijedeći svoje ideje tragaju za izumima i odgovarajućim rješenjima. Bilo bi neopravdano i krajnje necjelishodno tražiti od učenika da brzo, površno i nedovoljno studiozno donose sudove, a nedopustivo, nuditi im zaključke i gotova rješenja.

1.5. Matematička takmičenja

Matematička takmičenja su jedan od uspješnijih oblika podsticanja učenika za učenje matematike. Na takmičenjima učenici upoređuju svoja znanja sa vršnjacima iz svoje i iz drugih škola. Pripreme za takmičenja obavljaju se na časovima redovne nastave, dodatne nastave, matematičke sekcije, ili kroz samostalan rad učenika.

Za učenike osnovne škole od 2007. godine organizuju se školska takmičenja, republičko takmičenje i takmičenje učenika jugoistočne Evrope (Balkanijada). Ranije je broj takmičenja bio veći: školska, regionalna, Republičko, Savezno i Balkanijada. Primjeri sa kojima ćete se upoznati u narednom dijelu ove publikacije predstavljaju zadatke sa pomenutih takmičenja. Preporučljivo je da se na školskim takmičenjima daju zadaci koji su usklađeni sa ciljevima predmetnog programa, odnosno sa njegovim naprednijim zahtjevima. Izbor zadataka za Republičko takmičenje se usklađuje sa programom rada u dodatnoj nastavi. Ispitni centar Crne Gore, kao organizator Republičkog takmičenja, ubuduće će vršiti detaljnu analizu ostvarenih rezultata učenika, što će koristiti školama da razviju mjere za poboljšanje postignuća učenika.

Podsticanje nadarenih učenika na intezivno učenje i razvijanje interesovanja za matematiku treba da bude stalna briga škole, roditelja i društva u cjelini.

1.6. Istraživačka metoda

Praktičari u nastavi, metodičari i drugi koji kreiraju obrazovni sistem, stalno tragaju za novim oblicima i metodama rada, koje omogućavaju da se složena matematička građa na najjednostavniji način prilagodi psihofizičkim mogućnostima i uzrastu učenika.

Iz mnoštva metoda i oblika nastave koji se primjenjuju u našim školama, pažnju fokusiramo na istraživačku ili razvojnu metodu, koja je veoma bliska metodi problemske nastave.

Ova metoda zahtijeva strpljivost i taktičnost nastavnika, od koga se očekuje da umješno vodi čas, podstiče učenike da samostalno uočavaju bitne elemente problema, ali i da tačno i precizno predvidjaju, i definišu postupke koji vode ka njegovom rješenju. Svojom strpljivošću nastavnik pomaže učenicima da dođu do rezultata, pa i kada im dopušta da ponekad realizuju ideje za koje je siguran da ne mogu dati rezultat. I na greškama se uči! Ko se na greškama ne uči stalno će ih ponavljati.

Osnovni zadatak nastavnika je da sigurnim putem vodi učenika do cilja, dok je zadatak učenika da ulože sve svoje intelektualne kapacitete kako bi stvorili jasan i tačan misaoni uvid u strukturu sadržaja koje razmatraju. Produkt njihovog zajedničkog rada je trajno, funkcionalno i primjenljivo znanje.

Istraživačka, pronalazačka ili poznata još i kao heuristička metoda, je vrlo podesna za rad sa nadarenim učenicima. Ona predstavlja tipičan put za induktivni prilaz nastavi matematike. Na vješto postavljena pitanja nastavnika učenici daju odgovore koji predstavljaju premise za donošenje konačnih sudova. Ovo je ujedno razvojna metoda, jer pitanja, odgovori i konstatacije predstavljaju karike jednog lanca.

Klasičnu strukturu ove metode prikazuje šema:

1. pitanje $\rightarrow$ 1. odgovor $\rightarrow$ 1. konstatacija
2. pitanje $\rightarrow$ 2. odgovor $\rightarrow$ 2. konstatacija
3. pitanje $\rightarrow$ 3. odgovor $\rightarrow$ 3. konstatacija
4. ....
5. ....
6. ....

....

Zaključak

Aktivnosti nastavnika i učenika na istraživačkom času sadrže sljedeće faze:

I Na početku časa nastavnik izlaže problem.

Ne treba podsjećati da su zadaci složeni i nestandardni.

II Priprema se plan za rješavanje problema – vrši se analiza zadatka.

U ovoj fazi osnovno je razumjeti zadatak. Poželjno je, ali ne pretendujemo da je i nužno, da učenik priprema strategiju za rješavanje problema po sljedećem scenariju:

- Što je zadatkom dato, a što se traži? Kako glasi uslov zadatka?

- Je li moguće zadovoljiti uslov? (o ovome brinu autori zadataka, ali se dešava da uslovi za određivanje nepoznate nekada budu suvišni ili kontradiktorni. Ko ukaže na eventualne manjkavosti, riješio je zadatak).
- Nacrtati sliku, ili uvesti prepoznatljive oznake.
- Da li je ranije viđen isti zadatak (u drugoj formi), ili, da li je rješavan sličan zadatak?
- Koja matematička znanja treba primijeniti da bi riješili zadatak?
- Ukoliko je rješavan sličan problem, provjeriti da li njegovo rješenje može pomoći pri rješavanju postavljenog zadatka.
- Da li su iskorišćeni svi uslovi zadatka?
- Da li su razmotreni svi bitni pojmovi u zadatku?

III Postavljaju se pretpostavke ili hipoteze, čime se vrši dekompozicija zadatka.

Poslije pripremljene strategije pristupa se:
- Pojedinačnoj analizi svakog dijela zadatka;
- Grupisanju dobijenih segmenata u cjelinu.

Prilikom realizacije plana, strogo se kontroliše svaki korak, pri čemu, kada god je moguće, treba dokazivati njihovu ispravnost.

IV Učenici zadatak rješavaju samostalno, u parovima ili grupama, u zavisnosti od prirode problema i strategije koju odabere nastavnik.

V Izvode se zaključci i eventualno vrši uopštavanje dobijenih rezultata.

U ovoj fazi treba odgovoriti na sljedeća pitanja:
- Može li se provjeriti rezultat, odnosno dokaz?
- Da li se do rezultata može doći i na druge načine?
- Može li se dobijeni rezultat, ili dokaz primijeniti u nekoj drugoj prilici?

Sljedeći primjer ilustruje način primjene izloženog algoritma.

Primjer 1.

Grupa kosača je kosila dvije livade od kojih je jedna dva puta veća od druge. Pola dana grupa je kosila veću livadu, a na podne se podijelila, tako da je polovina grupe ostala da kosi veću, a ostali su prešli na manju livadu. Na kraju dana veća livada je bila pokošena. Sjutradan, jedan kosač, radeći od ujutro do uveče, pokosio je manju livadu. Koliko je bilo kosača u grupi?

Rješenje I:

BR.	PITANJE	ODGOVOR	KONSTATACIJA
1.	Šta je poznato u zadatku?	Grupa kosača od jutra do večeri kosila je dvije livade, od kojih je jedna dva puta veća od druge.	Grupa kosača od jutra do večeri kosila je dvije livade, od kojih je jedna dva puta veća od druge.
2.	Koliko je kosača u grupi?	Ne znamo.	Neka je u grupi x kosača.
3.	Koliku površinu pokosi jedan kosač za jedan dan?	Ne znamo.	Označimo traženu površinu sa y.

BR.	PITANJE	ODGOVOR	KONSTATACIJA
4.	Na koji način su kosači podijeljeni u grupe?	Cijela grupa je do podne kosila veću livadu, a poslije podne polovina grupe je kosila veću, a druga polovina grupe manju livadu.	x kosača je do podne kosilo veću livadu. Poslije podne $\frac{x}{2}$ je kosilo veću, a $\frac{x}{2}$ manju livadu.
5.	Koliku je površinu pokosila grupa za jedan dan?	Ako jedan kosač za jedan dan pokosi y kvadratnih jedinica, x kosača će za dan pokositi $x \cdot y$ takvih jedinica.	Površina veće livade je $\frac{1}{2}\left(x \cdot y + \frac{x}{2} \cdot y\right) = \frac{3}{4} x \cdot y$, a od manje je pokošeno $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y = \frac{1}{4} x \cdot y.$
6.	Da li je manja livada pokošena toga dana?	Nije. Jedan radnik je sjutradan pokosio manju livadu.	Ukupna površina manje livade je $\frac{1}{4} x \cdot y + y.$
7.	Kakav je odnos površina dviju livada?	Jedna je dva puta veća od druge (konstatovano je u odgovoru na 1. pitanje).	$\frac{3}{4} x \cdot y = 2\left(\frac{1}{4} x \cdot y + y\right)$
8.	Kako rješiti jednačinu sa dvije promjenljive?	Pošto je po prirodi zadatka $y \neq 0$, dijeleći obje strane jednačine sa y, dobićemo linearnu jednačinu po x.	Prethodnoj jednačini odgovara linearna jednačina: $\frac{3}{4} x = 2\left(\frac{1}{2} x + 1\right)$
9.	Šta je rješenje posljednje jednačine?	$x = 8.$	Rješenje jednačine je broj $x = 8.$

Zaključak: U grupi je bilo 8 kosača.

Jedan od efikasnijih metoda za mobilisanje intelektualnih mogućnosti učenika je rješavanje problema na više načina. Na taj način se produbljuju znanja, dobija više ideja za rešavanje zadataka i razvijaju stvaralačke sposobnosti učenika.

Ova metoda je korisna i zbog toga što se može primjenjivati u skoro svim oblicima učenja (frontalni oblik rada, rad u parovima, rad u grupama i sl.). Potrebno je učenike informisati o važnosti rješavanja istog zadatka na više načina. Treba ukazivati da to nije gubljenje vremena, već, naprotiv, razvijanje stvaralačkih sposobnosti i kreativnih mogućnosti učenika. Treba insistirati, da učenici uvijek, kada je to moguće, tragaju za rješavanjima problema na druge načine.

Pošto su autori ove studije dugogodišnji članovi takmičarskih komisija, imaju uvid u čitavu lepezu ideja koje su učenici koristili pri rješavanju zadataka. Često su takmičari rješavali zadatke na elegantnije načine, nego sami autori .

Kako se zadatak može riješiti na više načina pokazaćemo rješavajući prethodni primjer.

Rješenje II:

Veću livadu kosilo je do podne $\frac{1}{2}$ grupe kosača, zašto je utrošila $\frac{1}{2}$ radnog dana, a poslije podne $\frac{1}{4}$ grupe što iznosi $\frac{1}{4}$ radnog dana. Znači da je veća livada pokošena za $\frac{3}{4}$ radnog dana. Za popodnevno košenje manje livade utrošeno je $\frac{1}{4}$ radnog dana cijele grupe. Pošto je druga livada dva puta manja od prve, za njeno košenje potrebno je dva puta manje vremena, tj. $\frac{3}{8}$ radnog dana. Budući da je za košenje druge livade potreban još jedan kosač, znači da bi cijela grupa pokosila manju livadu za $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ radnog dana. Kako je jedan kosač završio košenje za jedan dan, slijedi da čitava grupa broji 8 kosača.

Rješenje III - Tolstojevo[4] rješenje zadatka

Pošto je veću livadu do podne kosila cijela grupa, a poslije podne $\frac{1}{2}$ grupe, znači da će poslije podne biti pokošena $\frac{1}{3}$ veće livade. Kako drugu livadu koja je 2 puta manja od prve kosi dva puta manje kosača, poslije podne će biti pokošena takođe njena trećina. Ostalo je da se sjutradan pokosi $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ livade. Znači da jedan kosač za jedan dan pokosi $\frac{1}{6}$ livade. Dakle, prvog dana je pokošeno $\frac{6}{6}$ veće livade i $\frac{1}{3}$ manje livade, što iznosi $\frac{8}{6}$ veće livade. Kako jedan kosač za jedan dan pokosi $\frac{1}{6}$ livade, zaključujemo da je u grupi bilo 8 kosača.

Neke zadatke mogu rešavati učenici različitih uzrasta.

---

[4] Zadatak iz **Primjera 1** u matematičkoj literaturi je poznat kao Tolstojev zadatak, ili zadatak o Tolstojevim kosačima. Malo je poznato da je slavni ruski pisac Lav Nikolajevič Tolstoj (1828-1910) jedno vrijeme predavao matematiku u svojoj rodnoj Jasnoj Poljani i da je autor originalnog udžbenika ARITMETIKA. Veliki pisac je imao običaj da u prigodnim prilikama svojim gostima postavlja raznovrsne matematičke zadatake. Jedan od takvih zadataka je i ovaj.

Primjer 2.

Razlika dva komplementna ugla je $25^0 30'$. ***Odrediti mjere tih uglova.***

Zadatak mogu riješiti učenici petog razreda osmogodišnje, odnosno VI razreda reformisane osnovne škole, ali i učenici starijeg uzrasta.

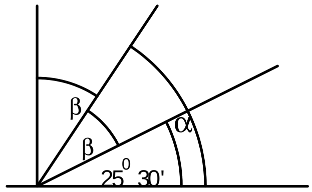
Razmotrimo, kako zadatak rješavaju najmlađi učenici.

Rješenje I

Koji je mimimalni matematički instrumentarij potreban za rješavanje zadatka?

Očigledno, da se mora znati pojam dva komplementna ugla, grafičko sabiranje i oduzimanje uglova, aritmetičko sabiranje i oduzimanje uglova, elementarne jednačine i načini njihovog rješavanja.

Označimo tražene uglove sa $\alpha\ i\ \beta$. Prema definiciji komplementnih uglova važi $\alpha + \beta = 90^0$. Ne umanjujući opštost rezultata možemo pretpostaviti da je $\alpha > \beta$. Nacrtajmo prav ugao, a zatim u njegovoj oblasti uglove $\alpha\ i\ \beta$, tako da je $\alpha + \beta = 90^0$, i $\alpha - \beta = 25^0 30'$ (slika 1.).



Slika 1.

Očigledno je $\beta + \beta + 25^0 30' = 90^0$. Rješavajući ovu jednačinu dobijamo: $2\beta = 90^0 - 25^0 30'$, *tj.* $\beta = 32^0 15'$. Konačno je $\alpha = 57^0 45'$.

Rješenje II

Neka su $\alpha\ i\ \beta$ komplementni uglovi. Tada prema uslovima zadatka važe relacije:

$$\alpha + \beta = 90^0 \tag{1.1}$$

$$\alpha - \beta = 25^0 30' \tag{1.2}$$

Uočimo da je uslov (1.2) ekvivalentan sa

$$\alpha = \beta + 25^0 30' \tag{1.3}$$

Ako uvrstimo (1.3) u (1.1) dobijamo jednačinu $2\beta + 25^0 30' = 90^0$, čije smo rješenje ranije odredili.

Rješenje III

Formirajmo sistem $\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90^0 \\ \alpha - \beta &= 25^0 30' \end{aligned}\right\}$. Rješavanjem sistema jednom od poznatih metoda dobijamo vrijednosti uglova $\alpha\ i\ \beta$.

Nije teško zaključiti koja su matematička znanja potrebna učenicima starijih razreda za rješavanje ovog zadatka.

Učenike tokom rada treba ohrabrivati i ne dopuštati im da pri prvom neuspjehu pokleknu, izgube samopouzdanje i vjeru u sopstvene mogućnosti.Treba im jasno staviti do znanja da će upornim i strpljivim radom riješiti i najkomplikovanije zadatke. Učenici moraju znati da su se i najveća matematička imena suočavala sa sličnim problemima.

Zadaci u ovoj publikaciji predstavljaju dio Zbirke zadataka sa matematičkih takmičenja, koja je u pripremi i koja će sadržati oko 500 riješenih zadataka. Pošto su, u principu, na takmičenjima algebra (aritmetika) i geometrija zastupljene sa po 40% zadataka, a logičko-kombinatorni zadaci sa 20%, takav pristup zadržali smo i u ovom prilikom.

Zadaci VI, VII i VIII razreda osmogodišnje osnovne škole uglavnom odgovaraju zadacima VII, VIII i IX razreda reformisane škole.

2. ALGEBRA I ARITMETIKA

2.1. Izbor zadataka

Iz ove oblasti izabrano je 20 riješenih zadatka sistematizovanih po razredima i po težini. Iako broj zadataka nije veliki, pažljivom čitaocu neće promaći mnoštvo ideja korišćenih za rješavanje pojedinih problema.

Prilikom selekcije zadataka nastojali smo da oni budu raznovrsni i da pokrivaju većinu sadržaja aritmetike i algebre. Nezaobilazna i inspirativna teorija brojeva je zastupljena sa nekoliko zadataka. Jednačinama, nejadnačinama, sistemima jednačina i problemima koji se svode na njihovo rješavanje takođe je poklonjena značajna pažnja. U Publikaciji su izdvojeni i zadaci koji nijesu strogo vezani za programske sadržaje jednog predmeta, te je za njihovo rješavanje potrebno logičko rasuđivanje i sposobnost učenika da dobijene rezultate povežu u cjelinu.

2.2. Zadaci sa rješenjima

1. Zadatak[5]

Marko je tražio od mame 200€ za ljetovanje. Majka je predložila da Marko za 20 dana štedi novac koji će mu ona davati , tako što će prvog dana dobiti 1€, drugoga 2€, trećeg 3€ i svakog narednog po jedan euro više nego prethodnog dana. Marko nije pristao na maminu ponudu. Je li Marko pogriješio?

Rješenje:

Marko je pogriješio, jer bi umjesto 200 € dobio 1 + 2 + 3 +·····+ 18 + 19 + 20 = (1+20) + (2+19) + (3 + 8) + + (10+11) = 10 · 21 = 210 € ®

2. Zadatak[6]

Kojih sedmocifrenih brojeva ima više i za koliko: onih koji počinju brojem 2007, ili onih koji se završavaju brojem 2007?

Rješenje:

Traženi brojevi su oblika $2007abc$ i $abc2007$, gdje $a,b,c \in \{0,1,...,9\}$. U prvom slučaju $\overline{abc}$ je bilo koji broj (jednocifren, dvocifren ili trocifren). Brojeva oblika $\overline{abc}$ koji počinju sa nulom ima tačno 100 (000,001,..., 099). Takođe, brojeva koji počinju sa 1 ima 100 itd. Dakle, sedmocifrenih brojeva koji počinju sa 2007 ima ukupno 1000.

Ako se sedmocifreni broj završava sa 2007, cifra a broja $\overline{abc}$ ne može biti 0 (jer bi u protivnom broj bio šestocifren), pa se broj mogućnosti smanjuje za 100. Otuda, takvih brojeva ima 900.

Konačno, sedmocifrenih brojeva koji počinju sa 2007, ima za 100 više od onih koji se završavaju brojem 2007 ®

[5] Memorijal Aleksandar - Aco Pavićević; Bar, 2007. godine, 3. razred
[6] Memorijal Aleksandar - Aco Pavićević; Bar, 2007. godine, 5. razred

3. Zadatak[7]

Dokazati da je broj $\left(3^{2000}-1\right)$ djeljiv sa 10.

Rješenje:

Kako je $3^4=81$, broj $3^{2000}=\left(3^4\right)^{500}=81^{500}$ i očigledno se završava sa 1. Ako se od takvog broja oduzme 1, dobija se broj čija je cifra jedinica 0, a takav broj je djeljiv sa 10 ®

4. Zadatak[8]

Pri rješavanju jednačine $\frac{3x+15}{3}-\left(-2x+2\right)-6\left(5-x\right)=0$ učenik je umjesto koeficijenta - 2 uz x u drugom članu izraza, napisao neki drugi broj i na taj način dobio za 24 veću vrijednost nepoznate u odnosu na njenu stvarnu vrijednost. Koji broj je učenik napisao umjesto koeficijenta - 2?

Rješenje:

Data, pogrešno napisana jednačina (sa koeficijentom - 2 uz x u prvoj zagradi) ima rješenje $x=3$. Dakle, sa pogrešnim koeficijentom učenik je dobio rješenje $x=3+24=27$. Označimo sa k pogrešan koeficijent. Važi tačna jednakost $\frac{3\cdot 27+15}{3}-\left(k\cdot 27+2\right)-6\left(5-27\right)=0$.

Odavde je $k=6$, što znači da je učenik umjesto broja - 2 napisao broj 6 ®

5. Zadatak[9]

Odrediti sve cijele vrijednosti x za koje je:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}-\cdots-\frac{1}{98\cdot 99}-\frac{1}{99\cdot 100}\right)\cdot\left|3x+2\right|=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}\cdot$$

[7] Regionalno takmičenje učenika osnovnih škola, 2000. godine, 6. razred
[8] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2000. godine, 6. razred
[9] Ibid

Rješenje:

Primjenom elementarnih transformacija datu jednačinu zamjenjujemo nizom prostijih jednačina:

$$\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\right]-\cdots\cdots-\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)-\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\cdot|3x+2|=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots-\frac{1}{98}+\frac{1}{99}-\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)\cdot|3x+2|=1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}},$$

$\frac{1}{100}\cdot|2x+3|=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}$; $\frac{1}{100}\cdot|3x+2|=1+\frac{3}{5}$; $\frac{1}{100}\cdot|3x+2|=\frac{8}{5}$. Odavde slijedi jednačina, $|3x+2|=160$, odnosno $3x+2=160,\ ili\ 3x+2=-160.$

Rješenje prve jednačine je $x=\frac{158}{3}\notin \mathbf{Z},$ dok je rješenje druge, $x=-54$, traženo rješenje ®

6. Zadatak[10]

Dati su brojevi A, B i C takvi da je svaki od njih veći od 0 i manji od 1. Ako je A najveći od brojeva A, B i C dokazati da je: 1 - (1 - A) (1 - B) (1 - C) > A.

Rješenje:

Neka je 0 < A < 1, 0 < B < 1 i 0 < C < 1. Uočimo da je – 1 < - A < 0,odnosno da je 0 < 1 – A < 1. Isto važi za brojeve B i C, tj. 0 < 1 – B < 1 i 0 < 1 – C < 1. Pošto je 1 – A > 0, a iz posljednje dvije nejednakosti slijedi da je 0<(1-B)(1-C)<1, zaključujemo da je (1 - A) (1 - B) (1 - C) < 1 - A. Ako datu nejednakost napišemo u obliku – 1 + (1 - A) (1 - B) (1 - C) < -A, i pomnožimo sa - 1 dobijamo tvrđenje ®

7. Zadatak[11]

Odrediti sve uređene parove (x, y) ***cijelih brojeva*** $x\ i\ y$ ***takvih da je:*** $x^2+\frac{6}{y}=10.$

Rješenje:

Iz date jednakosti slijedi $x^2=10-\frac{6}{y}$. Cijeli broj y je djelilac broja 6, ako $y\in\{\pm6,\pm3,\pm2,\pm1\}$. Samo u tri slučaja vrijednost desne strane predstavlja kvadrat cijelog broja. Naime, jedino za $y=-1$, biće $x^2=16;$ za $y=1$, $x^2=4$, i za $y=6$ je $x^2=9.$ Rješenja zadatka su parovi: (4,-1), (-4,-1), (2,1), (-2,1), (3,6) i (-3,6)®

[10] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2001. godine, 6. razred
[11] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2000. godine, 6. razred

8. Zadatak[12]

Koliko puta će se od ponoći do podne poklopiti velika i mala kazaljka na satu, ne računajući ponoć, a računajući podne? Izračunati vremena tih poklapanja.

Rješenje:

Prvo poklapanje će biti poslije više od jednog sata, tj. Između 1 i 2 sata. Drugo poklapanje će biti između 2 i 3 sata, itd. Pretposlednje poklapanje je između 10 i 11 sati i poslednje, jedanaesto,poslije 11 sati, odnosno tačno u 12 sati. Pošto je brzina kretanja kazaljke na satu stalna između dva poklapanja proteći će isto vrijeme. Dakle, prvo poklapanje je bilo poslije $\frac{12}{11}$ časova, tj. u $1\frac{1}{11}$ časova. Ostala poklapanja dogodiće se u $2\frac{2}{11},\ 3\frac{3}{11}$,...., $10\frac{10}{11},\ 11\frac{11}{11}=12$ časova ®

9. Zadatak[13]

Koloniju od 200 bakterija napao je jedan virus. U toku prvog minuta virus uništi jednu bakteriju, a zatim se on podijeli na dva nova virusa i svaka od preostalih bakterija se podijeli na dvije nove bakterije. U sljedećem (drugom) minutu, dva virusa unište dvije bakterije, svaki po jednu, a zatim se svaki od njih podijeli na dva virusa i svaka od preživjelih bakterija podijeli se na dvije bakterije.Proces se dalje nastavlja na isti način. Za koje će vrijeme virusi uništiti sve bakterije?

Rješenje:

Poslije prvog minuta broj virusa biće 2, a broj bakterija $2(200-1)$. Poslije drugog minuta virusa će biti $2\cdot 2=2^2$, a bakterija $2\big(2(200-1)-2\big)=2^2(200-2)$, poslije trećeg minuta broj virusa je $2^2\cdot 2=2^3$, a broj bakterija $2\big(2^2(200-2)-2^2\big)=2^3(200-3)$ itd. Poslije n minuta biće 2^n virusa i $2^n(200-n)$ bakterija. Broj bakterija će biti nula ako je $2^n(200-n)=0$, što je moguće za $n=200$. Poslije 200 minuta sve bakterije biće uništene ®

[12] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2001. godine, 6. razred
[13] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2002. godine, 6. razred

10. Zadatak[14]

Niz brojeva se formira na sljedeći način: na prvom mjestu je broj 9, a dalje iza svakog broja je zbir cifara njegovog kvadrata uvećan za 1, tj. na drugom mjestu je broj 10, na trećem 2 itd. Koji broj se nalazi na 2000-om mjestu?

Rješenje:

Prema datom pravilu formirajmo nekoliko članova niza: 9,10, 2, 5, 8, 11, 5, 8, 11,... Očigledno je, da se trojka brojeva 5, 8 i 11, ovim redom ponavlja. Iz $2000 = 3\cdot 666+2$, zaključujemo da će poslije 666 ponavljanja na 1998. mjestu biti broj 11, a na 2000-om broj 8 ®

11. Zadatak[15]

Dokazati da je broj $\underbrace{44\ldots4}_{2000}+\underbrace{11\ldots1}_{1001}-\underbrace{66\ldots6}_{1000}$ ***kvadrat nekog broja.***

Rješenje:

Uočimo da je $\underbrace{11\ldots1}_{1001}=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{1001}=\frac{1}{9}\left(10^{1001}-1\right)$, zatim da $\underbrace{44\ldots4}_{2000}=4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{2000}=\frac{4}{9}\left(10^{2000}-1\right)$, i $\underbrace{66\ldots6}_{1000}=\frac{6}{9}\left(10^{1000}-1\right)$. Slijedi da je dati broj

$$\frac{4}{9}\left(10^{2000}-1\right)+\frac{1}{9}\left(10^{1001}-1\right)-\frac{6}{9}\left(10^{1000}-1\right)=\frac{4}{9}\cdot 10^{2000}+\frac{10}{9}\cdot 10^{1000}-\frac{6}{9}\cdot 10^{1000}-\frac{4}{9}-$$

$$\frac{1}{9}+\frac{6}{9}=\frac{4}{9}\cdot 10^{2000}+\frac{4}{9}\cdot 10^{1000}+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\left(2\cdot 10^{1000}+1\right)^2=\frac{\left(2\cdot 10^{1000}+1\right)^2}{3^2}=\left(\frac{200\ldots1}{3}\right)^2=$$

$$\underbrace{66\ldots6}_{999}7^2$$ ®

---

[14] Regionalno takmičenje učenika osnovnih škola, 2000. godine, 7. razred

[15] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2000. godine, 7. razred

12. Zadatak[16]

Teretni voz dug 110 metara krećući se brzinom od 30km/h sustiže pješaka u 9 sati i 10 minuta i prolazi ga za 15 sekundi. U 9 sati i 16 minuta voz susreće drugog pješaka i mimoilazi se sa njim za 12 sekundi. U koliko sati će se sresti pješaci?

Rješenje:

U svakoj sekundi voz pređe $\frac{30000}{3600}m$, odnosno $\frac{25}{3}m.$ Ako pješak za 15 sekundi pređe x metara, tada voz pređe 110+ x, pa je $110+x=\frac{25}{3}\cdot 15,$ tj. $x=15m,$ tj. brzina prvog pješaka $v_1=1\frac{m}{s}.$ Ako drugi pješak za 12 sekundi mimoilaženja pređe y metara, za to vrijeme voz pređe 110 - y, pa je $110-y=\frac{25}{3}\cdot 12,\ tj.\ y=10m,$ što znači da je brzina drugog pješaka $v_2=\frac{5}{6}m/s.$ Za 6 minuta voz je prešao $6\cdot 60\cdot\frac{25}{3}=3000m.$ Ako su se pješaci sreli poslije t sekundi, tada je $t\cdot 1+(360-t)\cdot\frac{5}{6}=3000,\ t=1800''=30',$ što znači da se susret dogodio u 9 sati i 40 minuta ®

13. Zadatak[17]

Ako su a i b pozitivni brojevi $(a>b>0)$ takvi da je $a^2+b^2=4ab,$ tada je $\frac{a+b}{a-b}$ iracionalan broj. Dokazati.

Rješenje:

Ako lijevoj i desnoj strani jednakosti $a^2+b^2=4ab$ dodamo i oduzmemo 2 ab dobijamo:

$$(a+b)^2=6ab \qquad (1.1)$$

$$(a-b)^2=2ab \qquad (1.2)$$

Dalje iz (1.1) i (1.2) slijedi: $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=\frac{6ab}{2ab},\ ili\ \frac{a+b}{a-b}=\sqrt{3}.$

---

[16] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2001. godine, 7. razred.
[17] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2006. godine, 7. razred.

Pretpostavimo da je $\sqrt{3}$ racionalan broj, tj. broj oblika $\frac{p}{q}$, pri čemu su $p\ i\ q$ uzajamno prosti brojevi. Dakle, $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$. Kvadriranjem ove jednakosti dobijamo: $p^2 = 3q^2$, odakle zaključujemo da $3 \mid p^2$ ($p\ i\ q$ su uzajamno prosti, pa su takvi i njihovi kvadrati), odnosno da $3 \mid p.$ Iz ove relacije slijedi da postoji broj $s,$ takav da je $p = 3s.$ Dalje je $(3s)^2 = 3q^2, ili\ q^2 = 3s^2,$ odakle, analogno prethodnom rezonovanju zaključujemo da $3 \mid q.$ Relacije $3 \mid p$ i $3 \mid q$ su u suprotnosti sa pretpostavkom da su $p\ i\ q$ uzajamno prosti brojevi, što pokazuje da ne postoji razlomak koji je jednak $\sqrt{3}$ ®

14. Zadatak[18]

Za realne brojeve a i b važi nejednakost $\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1$. Dokazati da je apsolutna vrijednost jednog od brojeva a i b manja od 1, a drugog veća od 1.

Rješenje:

Mora biti $a+b \neq 0,$ tj, $a \neq -b,$ pa datu nejednakost transformišemo na oblik $(1+ab)^2 < (a+b)^2,$ odakle je $1-a^2+a^2b^2-b^2 < 0,$ odnosno, $1-a^2-b^2\left(1-a^2\right) < 0.$ Odavde dobijamo $\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right) < 0,$ pa je $1-a^2 < 0$ i $1-b^2 > 0$, ili obrnuto, tj. $1-a^2 > 0\ i\ 1-b^2 < 0.$

Odavde je $a^2 > 1$ i $b^2 < 1$, odnosno $|a| > 1\ i\ |b| < 1$, ili obrnuto, što je i tvrđeno ®

15. Zadatak[19]

Postoje li prirodni brojevi m i n, takvi da su brojevi m^2+n i n^2+m kvadrati prirodnih brojeva?

Rješenje:

Za prirodne brojeve $m\ i\ n$ važi samo jedna od tri relacije: $m = n,\ m > n\ ili\ m < n.$ Pretpostavimo da je $m = n.$ Tada važi $m^2 + n = k^2$, ili $m^2 < k^2 = m^2 + n = m^2 + m < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$, tj. $m^2 < k^2 < (m+1)^2$. Odavde slijedi da postoje prirodni brojevi m i k takvi da je $m < k < m+1$ što nije moguće.

---

[18] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2000. godine, 7. razred

[19] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2001. godine, 7. razred

Neka je $m > n$. Tada je $m^2 + n = k^2$, odakle dobijamo $m^2 < k^2 = m^2 + n < m^2 + m < (m+1)^2$, što se svodi na prethodni, nemogući slučaj. Provjerimo tačnost relacije $m < n$. Postupajući slično kao u prethodnim slučajevima, iz $n^2 + m = p^2$ dobijamo $n^2 < p^2 < (n+1)^2$, što je nemoguće. Dakle, traženi prirodni brojevi m i n ne postoje ®

16. Zadatak[20]

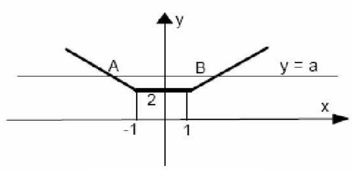
Za koje vrijednosti realnog broja a jednačina $|x-1| + |x+1| = a$ ima:
a) najviše rješenja,
b) nema rješenja,
c) ima tačno dva rješenja?

Rješenje:

Nacrtajmo grafik funkcije $y = |x-1| + |x+1|$. Prema definiciji apsolutne vrijednosti broja, odnosno izraza važi: $|x-1| = \begin{cases} x-1, \ za\ x \ge 1 \\ 1-x, \ za\ x \le 1 \end{cases}$, i $|x+1| = \begin{cases} x+1, \ za\ x \ge -1 \\ -x-1, \ za\ x \le -1 \end{cases}$,

pa je $y = \begin{cases} 1-x-x-1, \ za \quad x \le -1 \\ 1-x+x-1, \ za \quad -1 \le x \le 1, \\ x+1+x-1, \ za \quad x \ge 1 \end{cases}$

odnosno, $y = \begin{cases} -2x, \ za \quad x \le -1 \\ 2, \quad za \quad -1 \le x \le 1. \\ 2x, \ za \quad x \ge 1 \end{cases}$



Slika 2.

Grafik funkcije prikazan je na slici 2.

Presjek grafika funkcije i prave $y = a$, određuje broj rješenja date jednačine

a) Najviše rješenja se dobija za $a = 2$ ($\forall x \in [-1,1]$ je rješenje jednačine).

b) Ako je $a < 2$ prava $y = a$ ne siječe grafik funkcije, i jednačina nema rješenja.

c) Ako je a >2, jednačina ima samo dva rješenja (apscise tačaka A i B) ®

[20] Regionalno takmičenje učenika osnovnih škola, 2000. godine, 8. razred

17. Zadatak[21]

Petar i Ivana stanuju u istom soliteru u kojem svaki sprat ima po 10 stanova. Stanovi počinju od prvog sprata i numerisani su brojevima 1, 2, 3... Petar stanuje na spratu čiji je broj jednak broju stana u kojem stanuje Ivana. Zbir brojeva stanova Ivane i Petra je 239. Koji je broj stana u kojem stanuje Petar?

Rješenje:

Neka je $x+1$ broj Ivaninog stana $(x>0)$. Prema uslovu $x+1$ je istovremeno broj sprata na kojem stanuje Petar. Označimo sa $10x+y$ broj Petrovog stana $(0\le y\le 9)$. Na osnovu uslova i naznačenih pretpostavki formiramo jednačinu $(x+1)+(10x+y)=239$, odnosno, $11x+y=238$. Odavde je $x=\dfrac{238-y}{11}$, ili $x=\dfrac{21\cdot 11+7-y}{11}$, odnosno $x=21+\dfrac{7-y}{11}$. Iz poslednje jednačine zaključujemo da $x\in$ N, samo ako je $\dfrac{7-y}{11}\in$ N, što je s obzirom na uslov $(0\le y\le 9)$, moguće jedino za $y=7$. Tada je $x=21$, pa je broj Petrovog stana 217 ®

18. Zadatak[22]

Riješi jednačinu: $\dfrac{1}{(x-1)x}+\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}=1.$

Rješenje:

Transformišimo lijevu stranu jednačine na sljedeći način:
$\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)=1.$ Poslije anuliranja suprotnih izraza dobijamo $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}=1,$ pri čemu je $x\ne 0,\ x\ne\pm 1,\ x\ne -2\ i\ x\ne -3.$
Odavde se dobija kvadratna jednačina $x^2-2x-7=0,$ koju svodimo na oblik $x^2-2x+1=8$, tj, $(x-1)^2=8$. Odavde je $x-1=\pm 2\sqrt{2}$, odnosno $x=1\pm 2\sqrt{2}$ ®

[21] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2002. godine, 8. razred
[22] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2006. godine, 8. razred

19. Zadatak[23]

Proizvod prvih n prirodnih brojeva $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$, naziva se„en faktorijel“ i označava se sa $n!$. Da li se iz proizvoda sto faktorijela: 1!, 2!, 3!, ...,99!, 100! može izostaviti samo jedan, tako da proizvod ostalih 99 faktorijela bude kvadrat nekog broja?

Rješenje:

Može! Treba izotaviti broj 50!, jer je $P=1!2!3!4!\cdots 97!98!99!100!=$

$$(1)(1\cdot 2)(1\cdot 2\cdot 3)(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\cdots(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 97\cdot 98)(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 97\cdot 98\cdot 99)$$

$$(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100)=1^{100}\cdot 2^{99}\cdot 3^{98}\cdot 4^{97}\cdots 97^{4}\cdot 98^{3}\cdot 99^{2}\cdot 100.$$

Svi stepeni sa neparnom osnovom su kvadrati, jer su im izložioci parni, odnosno djeljivi sa 2, a stepeni sa parnom osnovom imaju neparne izložioce. Daljom transformacijom dobijamo:

$$P=\left(2^{98}\cdot 3^{98}\cdot 4^{96}\cdots 97^{4}\cdot 98^{2}\cdot 99^{2}\right)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots 98\cdot 100=$$

$$\left(2^{49}\cdot 3^{49}\cdot 4^{48}\cdots 97^{2}\cdot 98\cdot 99\right)^{2}\cdot 2^{50}(1\cdot 2\cdot 3\cdots 49\cdot 50)=$$

$$\left(2^{49}\cdot 3^{49}\cdot 4^{48}\cdots 97^{2}\cdot 98\cdot 99\cdot 2^{25}\right)^{2}\cdot 50!$$ ®

20. Zadatak[24]

Ako su x, y i z realni brojevi za koje važi $\begin{cases} x^2+2yz=x \\ y^2+2zx=y \\ z^2+2xy=z \end{cases}$ dokazati da je

$$\left||x+y+z|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

Rješenje:

Neka je $a=x+y+z.$ Sabiranjem desnih i lijevih strana dobijamo: $a=x+y+z=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=(x+y+z)^2=a^2$, odakle slijedi da je: $a-a^2=a(1-a)=0.$ Iz poslednje jednakosti je $a=0$ ili $a=1.$ Za obje vrijednosti broja a je $\left||x+y+z|-\frac{1}{2}\right|=\left||a|-\frac{1}{2}\right|=\left|a-\frac{1}{2}\right|=\left|\pm\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ ®

---

[23] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2000. godine, 8. razred

[24] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2002. godine, 8. razred

3. GEOMETRIJA

3.1. Predmet geometrije

Nas okružuje mnoštvo predmeta koje možemo posmatrati i izučavati vođeni različitim interesima. Tako nas može zanimati njihova veličina, hemijski sastav, tvrdoća, boja, oblik itd., pa zavisno od osobina tijela koje nas interesuju i koje istražujemo, to istraživanje može da spada u područje geometrije, hemije, fizike itd.

Jednostavnije rečeno, **geometrija** je nauka koja ispituje oblik, veličinu i međusobni položaj predmeta. Kako te osobine nazivamo geometrijskim, to se može reći da je **geometrija** nauka koja proučava geometrijske osobine predmeta. Za geometriju nijesu značajna druga svojstva predmeta koja nijesu geometrijska (na primjer težina, boja, hemijski sastav itd.).

Dio geometrije koji se bavi geometrijskim figurama u ravni zove se ***planimetrija*** (latinski planus znači ravan), dok ***stereometrija*** proučava geometrijske figure čije sve tačke nijesu u jednoj ravni (grčki stereo znači prostor).

Predmet kod koga nas interesuju samo oblik, veličina i položaj (tj. njegova geometrijska svojstva) nazivamo ***geometrijskim tijelom*** ili, kratko, ***tijelom***. Geometrijsko tijelo zauzima ograničeni dio prostora. Tijelo ima tri dimenzije: dužinu, širinu i visinu.

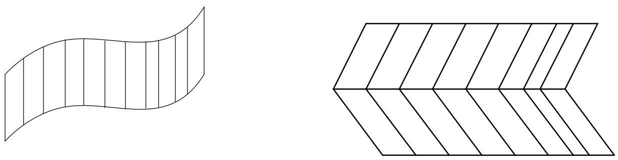
Tijelo je od ostalog dijela prostora odvojeno svojom ***površi.*** Površ ima dvije dimenzije: dužinu i širinu. Na primjer, površ je sjenka koju osvijetljeni predmet baca na tlo ili na zaklon. Približnu predstavu površi daju nam, na primjer, mjehur od sapunice, list sasvim tanko izvaljanog metala, list tanke hartije itd.

Za površ koja potpuno ograničava neko tijelo kažemo da je zatvorena.

Takve su na primjer, površ lopte (ova površ zove se sfera), površ kocke itd što je prikazano na slici 3.

Slika 3.

Površ koja ne ograničava tijelo nazivamo otvorenom površi; takve su, na primjer, uglasta i talasasta površ (slika 4.).

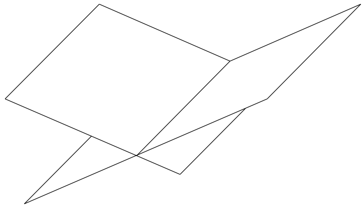


Slika 4.

Površi koje imaju oblik mirne površine vode nazivamo ravnim površima, ili ***ravnima***. Ravan se beskrajno prostire u dužinu i širinu. Na modelu ravan predstavljamo samo jednim njenim dijelom. Ravan je, dakle, otvorena beskrajna površ.

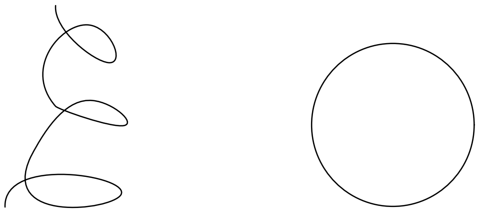
Liniju često zamišljamo: kao putanju kojom je ptica sljetjela s drveta na zemlju, kao putanju bačene lopte, kao putanju aviona, vještačkog satelita, kosmičkog broda, uopšte kao putanju kojom se neko tijelo kreće.

Dvije površi mogu se sjeći; njihov presjek je linija. Presjek dvije ravni je ***prava linija***, ili kratko ***prava*** (slika 5.).



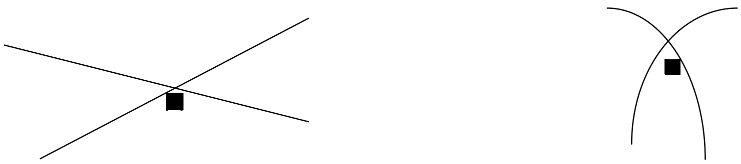
Slika 5.

Linija je zatvorena ili otvorena. Na primjer, kružnica je zatvorena linija, a spirala je otvorena linija (slika 6).



Slika 6.

Prava je najprostija linija, isto kao što je ravan najprostija površ. Tačka je presjek dviju linija (slika 7.).

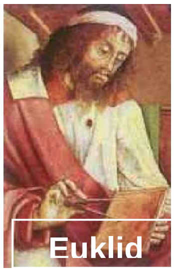


Slika 7.

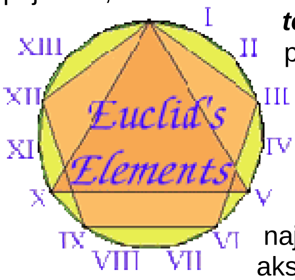
Geometrija kao nauka nastala je iz praktičnih čovjekovih potreba, prije svega iz potrebe mjerenja. Redovne poplave Nila u Egiptu zahtijevale su česta mjerenja zemljišta posjednika da bi se izbjegli sukobi oko podjele zemljišta i razrezivanja poreza. Građenje kanala za navodnjavanje, hramova i piramida, tražilo je mjerenje i znanje geometrije. Iz egipatskih papirusa saznajemo da se već u egipatskim školama učila praktična geometrija.

Poslije Egipćana, geometriju su u staro doba najbolje poznavali Vavilonci. Ali tek su Grci od čisto praktične i zanatske geometrije Egipćana i Vavilonaca izgradili geometriju kao nauku, uvodeći u nju umjesto očiglednog saznanja logičke dokaze i zakone deduktivnog mišljenja.

U stvaranju geometrije (nauke) mnogi matematičari starog vijeka dali su svoj doprinos, ali među njima se najviše ističu: Apolonije, Arhimed i Euklid.



Ovaj poslednji velikan grčke matematike prvi je sistematizovao dotadašnja znanja iz geometrije do kojih se došlo induktivnim putem kroz dugogodišnje čovjekovo iskustvo i objavio ih u svom naučnom djelu- »Elementi« (oko 300.g.p.n.e.). To spominjemo zbog toga što je to prvi i vrlo uspješan pokušaj deduktivnog zasnivanja i što je od ogromnog značaja za raznovrsne primjene u tehnici, nauci i praktičnom životu. Euklidovi Elementi (13 knjiga) izučavani su u školama više od 2000 godina, sve do našeg doba kada je i sistem geometrije usavršen.
Velika zasluga pripada Euklidu što je vrlo vješto i potpuno izložio osnove geometrije i sav njen materijal sistematizovao u jednu cjelinu. On je definisao geometrijske pojmove, uočio veći broj geometrijskih činjenica podijelivši ih u dvije grupe: ***aksiome i teoreme***. Formulisao je i dokazao sve do tada poznate činjenice pokazujući ih u vidu teorema i raspoređujući ih u jedan postupak i logičan lanac. Pored vrlo uspješne i rigorozno sprovedene deduktivne metode dokazivanja geometrijskih istina, valja odmah istaći da Euklid nije uspio besprekorno logički zasnovati geometriju. Njegove definicije često su nejasne, novi pojmovi definisani su pojmovima koje bi takođe trebalo definisati. No, najvažnije je to da je Euklidov sistem izgrađen na malom broju aksioma pa se on često pri dokazivanju poziva na očiglednost i sliku, što je u smislu geometrijskog dokaza sasvim neprihvatljivo.



Z A N I M LJ I V O S T I

Po predanju, na Ptolomejevo pitanje, ima li jednostavnijeg načina da se nauči geometrija, Euklid je odgovorio: "Nema kraljevskoga puta u geometriju."

Drugu anegdotu o Euklidu saopštava Stabaeus. Jedan učenik je upitao Euklida što će dobiti učenjem geometrije. Euklid je pozvao roba da učeniku da novčić jer učenik teži za materijalnim dobitkom, a ne za znanjem.

Za izgradnju geometrije najčešće se koriste tri osnovna pojma: tačka, prava i ravan. Tačan i za matematičke svrhe potpun opis odnosa daju aksiome geometrije koji se raspoređuju u pet grupa:

- 8 aksioma pripadnosti;
- 4 aksiome rasporeda;
- 5 aksioma podudarnosti;
- 1 aksioma paralelnosti;
- 2 aksiome neprekidnosti.

Polazeći od skupa ovih 20 aksioma, Hilbert, 1899. godine izvodi pojedine teoreme Euklidove geometrije i dokazuje ih bez poziva na očiglednost.

Pored euklidske geometrije postoje i druge neeuklidske geometrije: projektivna geometrija, geometrija Lobačevskog i geometrija Rimana.

U Euklidovoj geometriji, kroz jednu tačku van date prave može se povući samo jedna prava, koja leži u istoj ravni i ne siječe je. U geometriji Lobačevskog uvažavaju se svi Euklidovi postulati, izuzev **petog**, koji glasi da takvih pravih ima beskonačno mnogo. U Rimanovoj ravni ne može se tačkom izvan prave povući ni jedna paralela sa tom pravom.

U geometriji Euklida: "zbir unutrašnjih uglova u trouglu iznosi 180˚", a u geometriji Lobačevskog "zbir unutrašnjih uglova u trouglu manji je od 180˚", dok u geometriji Rimana taj zbir je veći od 180˚".

Uobičajeno je da školsku matematiku dijelimo na geometriju i aritmetiku (algebru). U prvoj učimo o figurama u drugoj o brojevima. Ali isto tako uviđamo da to nijesu sasvim odvojene oblasti - postoje -"mostovi" koji ih vezuju. Jedan (prvi) most je ***mjerenje.*** Figure imaju neka svojstva koja se mogu izražavati brojevima: linije-dužinu, površi površinu, tijela zapreminu i sl. U aritmetici, pak, služimo se raznim dijagramima, graficima i skalama da bismo predstavili odnose među brojevima (brojevna prava) i sl. Što više ulazimo u matematiku i njene tajne uviđamo da je tih "mostova" sve više.

U novije vrijeme, negdje od početka prošlog vijeka, matematičari nastoje da cijelu matematiku (aritmetiku, geometriju i druge matematičke discipline) postave na jedinstvene temelje. Jedan od glavnih "kamena temeljaca" su ***skupovi.***
Geometrijskim mjestom tačaka[25] (g.m.t.) nazivamo figuru koja se sastoji iz svih tačaka ravni koje imaju određeno svojstvo. Na primjer, kružnica je g.m.t. jednako udaljenih od date tačke. Ili, g.m.t. jednako udaljenih od dvije date tačke A i B je simetrala duži AB. Suštinski doprinos g.m.t. u konstruktivnim zadacima se sastoji u sljedećem: Ako treba konstruisati figuru X koja zadovoljava dva uslova, prvo se konstruiše figura F_1 kao g.m.t. ravni koja zadovoljava prvi uslov, zatim figura F_2 kao g.m.t. koja zadovoljava drugi uslov. Tražena figura X pripada presjeku figura F_1 i F_2.

3.2. Konstruktivni zadaci

Izvršiti geometrijsku konstrukciju neke figure znači odrediti sve tačke te figure koristeći se samo šestarom i lenjirom. Zato kad se govori o konstruisanju neke figure ili elementa te figure, misli se na geometrijsko konstruisanje.

Lenjir je instrument pomoću kojeg se može konstruisati:
- proizvoljna prava koja sadrži datu tačku,
- prava koja prolazi kroz dvije tačke,
- poluprava sa datim krajem i još jednom svojom tačkom,
- duž čiji su krajevi poznati.

Šestar je instrument kojim se mogu konstruisati:
- kružnica sa datim poluprečnikom i centrom,
- kružnica sa datim poluprečnikom i koja sadrži datu tačku,
- kružni luk kojem je poznat centar kružnice kojem pripada i dvije krajnje tačke,
- prenijeti datu duž na datu pravu od date tačke.

Svaki konstruktivni zadatak se sastoji iz četiri etape:

1. **analiza zadatka,**
2. **konstrukcija,**
3. **dokaz,**
4. **diskusija.**

---
[25] Dr Radoje Šćepanović, Dragoje Kasalica, ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE, za I razred srednjih škola, Podgorica, 20001.godine.

1. Analiza zadatka, predstavlja traženje načina da se dođe do rješenja, pri čemu se obično koristi pomoćni crtež (crtnje figure sa datim elementima). Polazi se od pretpostavke da je zadatak riješen, pa se zatim uočavaju veze između datih podataka i figure koju treba konstruisati, tj. vrši se izbor metode rješavanja;
2. Konstrukcija se sastoji u tome da se na osnovu zaključaka donijetih u analizi konstruiše figura konačnim brojem elementarnih i osnovnih konstrukcija;

Neke osnovne konstrukcije su:

2.1 sredina date duži;
2.2 simetrala duži:
2.3 simetrala ugla;
2.4 duž podudarna datoj duži;
2.5 tačka N simetrična tački M u odnosu na pravu p;
2.6 normala iz tačke A na pravu p;
2.7 prava koja prolazi kroz datu tačku M i paralelna je datoj pravoj p:
2.8 za datu duž AB i ugao α odrediti skup tačaka C takvih da je $\angle$BAC= α ;
2.9 za date duži čije su dužine a i b konstruisati duž čija je dužina $\sqrt{ab}$.

Osnovne konstrukcije se zasnivaju na poznatim teoremama, te ih često ne dokazujemo. Konstrukcija je kompletna ako se svaki korak opiše.

3. Dokaz ima za cilj da utvrdi, koristeći sve poznate aksiome i teoreme, da li dobijeno rješenje ispunjava uslove zadatka. Ukoliko je neka činjenica takva da već način konstrukcije potvrđuje da ona ispunjava uslove zadatka, kaže se da je to tačno po konstrukciji.
4. Diskusija treba da ispita uslove rješivosti i da otkrije sva rješenja zadatka.

3.3. Zadaci sa rješenjima

1. Zadatak[26]

Kroz datu tačku konstruisati pravu koja od krakova datog ugla odsijeca jednake odsječke.

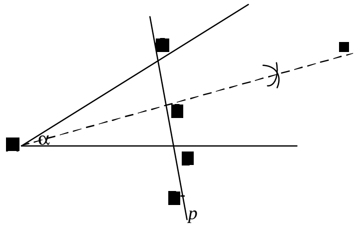
Rješenje:

1) *Analizirajući* zadatak (to jest tražeći način na koji ga treba riješiti), pretpostavimo da je on već riješen, to jest da je kroz tačku P (slika 8.) već povučena prava p koja krake ugla A siječe u tačkama B i C tako da je AB=AC. Iz AB=AC zaključujemo da su tačke B i C simetrične u odnosu na osu s koja prolazi kroz tačku A, te da je zato BC$\perp s$. Odatle vidimo način rješenja zadatka: prava p treba da je normalna na simetralu s datog ugla α (ova simetrala je istovremeno i osa simetrije za tačke B i C).
2) Sada je jednostavno izvesti *konstrukciju.* Prvo se konstruiše simetrala s ugla α , a zatim se iz tačke P konstruiše normala p - prava tražena u zadatku na simetralu s .

[26] Dr Milica Ilić-Dajović, GEOMETRIJA za I razred gimnazije, Zavod za izdavanje udžbenika Republike Srbije 1961. godine.

3) Treba *dokazati* da B i C – presječne tačke prave p i krakova ugla α - zadovoljavaju uslove zadatka, t.j.da je AB=AC. Zaista, simetrala s je i osa simetrije krakova tog ugla, pri tom je duž koja spaja dvije simetrične tačke B i C normalna na s. Pošto je BC$\perp s$ (po konstrukciji), zaključujemo da su B i C dvije simetrične tačke u odnosu na s i da je, na osnovu poznatog svojstva simetrale dviju tačaka, AB=AC, što je i trebalo dokazati.

4) Potrebno je još ispitati da li je zadatak moguć pod datim uslovima i koliko ima rješanja (ovo ispitivanje zove se *diskusija)*. Zadatak je moguć jer se iz date tačke može kontruisati normala na datu pravu. Zadatak ima, očigledno, samo jedno rješenje (usljed jedinstvenosti normale).



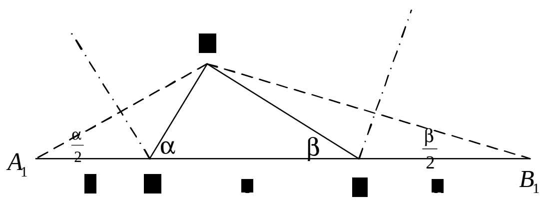
Slika 8.

2. Zadatak[27]

Konstruisati trougao ako su dati njegov obim i dva ugla.

Rješenje:

1) *Analiza.* – Neka je trougao ABC (slika 9.) traženi trougao i neka su α i β njegovi dati uglovi. Produžimo stranicu AB preko tačaka A i B.Iz tačke A konstruišimo na pravu AB duž AA_1 =AC, iz tačke B duž B_1 =BC. Dobili smo duž $A_1B_1 = a+b+c$ i dva jednakokraka trougla A_1AC i BB_1C kod kojih je $\angle A_1 = \frac{\alpha}{2}$, a $\angle B_1 = \frac{\beta}{2}$, jer je α spoljašni ugao prvog trougla, a β spoljašnji ugao drugog trougla. Dakle, u trouglu A_1B_1C znamo jednu stranicu A_1B_1 i dva nalegla ugla.Ovim elementima taj trougao je jednoznačno određen te se može konstruisati.

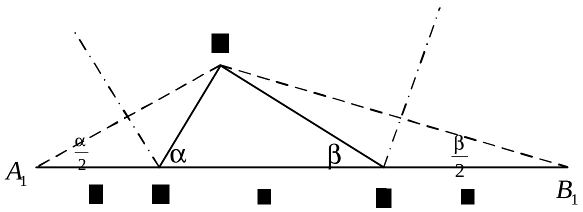


Slika 9.

2) *Konstrukcija.* Na datu duž $A_1B_1 = a+b+c$ konstruišimo uglove $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$; presjek njihovih krakova je jedno tjeme C traženog trougla. Sada konstruišimo simetrale duži

[27] Dr Milica Ilić-Dajović, GEOMETRIJA za I razred gimnazije, Zavod za izdavanje udžbenika Republike Srbije 1961. godine.

A_1C i B_1C; presjeci ovih simetrala i duži A_1B_1 su druga dva tjemena traženog trougla. Trougao ABC je traženi trougao (slika 10.).



Slika 10.

3) Dokaz. Tačka A je na simetrali duži A_1C, zato je $AA_1=AC=b$. Tačka B je na simetrali duži B_1C pa je $BB_1=BC=a$. Prema tome je AB + BC + CA=A_1B_1. Uglovi $\angle A$ i $\angle B$ su spoljašnji uglovi jednakokrakih trouglova A_1AC i BB_1C. Stoga je $\angle A=2(\angle A_1)$, $\angle B=2(\angle B_1)$, što znači da je $\angle A=\alpha$ i $\angle B=\beta$, odnosno da trougao ABC zadovoljava uslove zadatka.

4) Diskusija. Zadatak je moguć ako je, razumije se, $\alpha+\beta<180^\circ$, to jest $\angle A_1+\angle B_1<90^\circ$ (što znači da je trougao A_1B_1C tupougli).

4.1. Zapazimo da se konstruisane simetrale sijeku van trougla A_1B_1C. Kad bi se one sjekle na duži A_1B_1 ili u trouglu A_1B_1C, zadatak ne bi bio moguć. To je u vezi sa uslovom da, prirodno, mora biti $\alpha+\beta<180^\circ$, t.j. $\angle A_1+\angle B_1<90^\circ$ (što znači da je trougao A_1B_1C tupougli, a simetrale stranica takvog trougla sijeku se van trougla).

4.2. Dakle, zadatak je uvijek moguć kad je $\alpha+\beta<180^\circ$. Zadatak ima samo jedno rješenje, jer su tjeme C (na osnovu II pravila podudarnosti trouglova) i tjemena A i B (na osnovu jedinstvenosti simetrala duži) jednoznačno određeni.

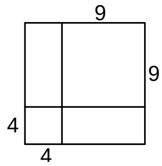
3.4. Zadaci sa takmičenja

Zadatak[28]

Kvadrat je dvijema pravama podijeljen na dva kvadrata i dva pravougaonika. Koliki su obimi datog kvadrata i dobijenih pravougaonika, ako su obimi dobijenih kvadrata 16 cm i 36 cm?

Rješenje:

Stranica prvog kvadrata je 16 cm:4 = 4 cm, a stranica drugog kvadrata je 36 cm :4 = 9 cm. Sa slike 11. je očigledno da je stranica velikog kvadrata 4 cm + 9 cm = 13cm, njegov obim 4·13 cm =52 cm. Stranice dobijenih podudarnih pravougaonika su 4 cm i 9 cm, pa su njihovi obimi jednaki i iznose 2·(4 cm + 9 cm) = 26 cm.



Slika 11.

Zadatak[29]

Dvije njive, jedna oblika kvadrata i druga u obliku pravougaonika imaju jednake obime. Zbir tih obima je 320m, pri čemu je širina pravougaone njive dva puta manja od dužine njive u obliku kvadrata. Odrediti dimenzije kvadrata i pravougaonika.

Rješenje:

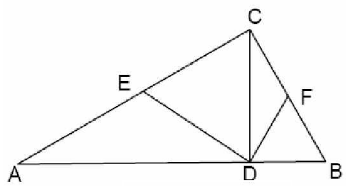
Obim svake od njiva jednak je 320 : 2 = 160 m. Stranica kvadrata je 160 : 4 = 40 m, a širina pravougaonika je 40 : 2 = 20 m. Druga stranica je (160 – $2 \cdot 20$) : 2 = 60 m.

***3.* Zadatak**[30]

U pravouglom trouglu ABC povučena je hipotenuzina visina CD. Neka su središta kateta AC i BC redom tačke E i F. Dokazati da je ugao EDF prav.

Rješenje:

Trouglovi ACD i BCD su pravougli. Poznata nam je osobina da je hipotenuza dva puta duža od odgovarajuće težišne duži. Zbog toga je DE = EC, pa je ΔCDE jednakokraki i $\angle EDC = \angle DCE$. Slično, trougao CDF je jednakokraki pa je i $\angle CDF = \angle DCF$.



Slika 12.

Dakle, $\angle EDF = \angle EDC + \angle CDF = \angle DCE + \angle DCF = \angle ECF = 90^\circ$ (slika 12.).

---

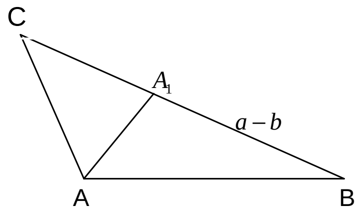
[28] Memorijal Aleksandar - Aco Pavićević; Bar, 2007. godine, 3. razred
[29] Ibid
[30] Regionalno takmičenje učenika osnovnih škola, 2003. godine, 6. razred

4. Zadatak[31]

Konstruisati trougao ABC ako mu je dato: $c = 5cm,\ a - b = 3{,}5cm$ ***i*** $\beta = 30^o$.

Rješenje:

Naka je ΔABC (slika 13.) traženi, tada uočimo tačku A_1 na stranici BC, takva da je $AC = A_1C = b$ pa je $\Delta A A_1C$ jednakokrak, a $BA_1 = a - b = 3{,}5cm$. Prvo ćemo konstruisati ΔABA_1, jer su mu date stranica AB= 5cm, ugao $\beta = 30^o$ i stranica $BA_1 = a - b = 3{,}5cm$ (na osnovu SUS). Tačku C nalazimo u presjeku simetrala duži AA_1 i produžetka stranice BA_1. Spajanjem tačke A, B i C dobijamo traženi ΔABC.



Slika 13.

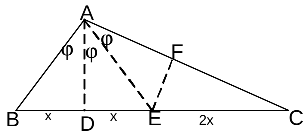
5. Zadatak[32]

Težišna duž i visina iz tjemena A u trouglu ABC dijele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla ABC?

Rješenje:

Neka su D i E podnožja visine i težišne linije iz tjemena A i neka je EF normalno na AC (vidi sliku 14.). Trouglovi ABD, ADE i AEF su podudarni, što treba dokazati.

Iz podudarnosti tih trouglova slijedi da je BD=DE=EF=x. Kako je E podnožje težišne duži, to je BE=EC=2x. Kako je ΔCEF pravougli trougao, a CE je dva puta veće od EF, slijedi da je $\angle E=60^o$ a $\angle C=30^o$, kako je $\angle DAC = \angle FEC = 60^o$ (kao uglovi sa normalnim kracima), dobijamo da je $2\varphi = 60^o$, $\varphi = 30^o$. Otuda je $\angle A = 3\varphi = 90^o$ i $\angle B = 60^o$.



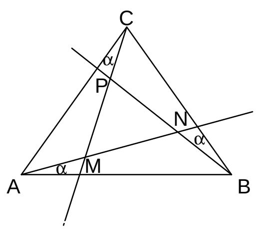
Slika 14.

6. Zadatak[33]

Iz tjemena A, B i C jednakostraničnog ΔABC povučene su poluprave Ax, By i Cz tako da je $\angle BAx = \angle CBy = \angle ACz = \alpha$. Dokazati da je ΔMNP jednakostraničan, pri čemu je Ax $\cap$ Cy = {M}, Ax $\cap$ By = {N}i By $\cap$ Cz= {P}.

Rješenje:

Iz ΔAMC dobijamo $\angle MAC + \angle ACM + \angle AMC = 180^o$, odnosno $60^o - \alpha + \alpha + \angle AMC = 180^o$. Otuda je $\angle AMC = 120^o$, odnosno $\angle PMN = 60^o$. Na isti način se pokazuje da je $\angle MNP = 60^o$. Ovim je tvrđenje dokazano (slika 15.).



Slika 15.

---

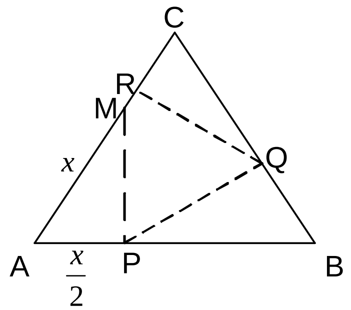
[31] Regionalno takmičenje učenika osnovnih škola, 2004. godine, 6. razred
[32] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2003. godine, 6. razred
[33] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2004. godine, 6. razred

7. Zadatak[34]

Dat je jednakostraničan trougao ABC, stranica AB=12cm. Neka je M tačka na stranici AC, tačka P podnožje normale iz M na AB, tačka Q podnožje normale iz P na BC i tačka R podnožje normale iz Q na AC. Izračunaj rastojanje AM, ako se R poklapa sa M.

Rješenje:

Obilježimo traženu duž AM sa x. Tada iz ΔAPM je $AP=\frac{x}{2}$, pa $PB=12-\frac{x}{2}$. Iz ΔPBQ je BQ=$\frac{1}{2}(12-\frac{x}{2})=6-\frac{x}{4}$, a QC=12-$(6-\frac{x}{4})=6+\frac{x}{4}$. Iz ΔQCR je RC=3+$\frac{x}{8}$. Iz uslova M$\equiv N$ slijedi AM+RC=12, odnosno $x+3+\frac{x}{8}=12;\frac{9x}{8}=9;x=8cm$ (slika 16.).



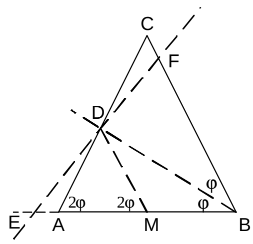
Slika 16.

***8.* Zadatak**[35]

Dat je jednakokraki trougao ABC, kod koga je AC=BC. Simetrala $\angle$ABC siječe krak AC u tački D. Prava p sadrži tačku D, normalna je na AD i siječe pravu AB u E. Dokazati da je BE=2AD.

Rješenje:

Neka prava p siječe BC u tački F i neka je DM$\parallel$BC. Trougao BEF je jednakokraki, jer je simetrala $\angle$EBF normalna na osnovicu EF. Zaključujemo da je ED=DF. Kako je DM$\parallel$BC, to je DM srednja linija ΔBEF, pa je EM=MB. Tada je težišna duž DM pravouglog ΔBDE jednaka polovini duži BE, tj. DM=$\frac{1}{2}$BE. Kako je ΔAMD jednakokrak ($\angle$DAM=$\angle$DMA=2φ) to je DM=AD=$\frac{1}{2}$BE, pa je BE=2AD (slika 17.).



Slika 17.

---

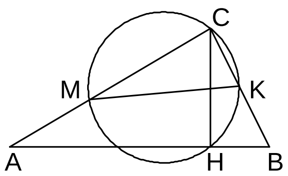
[34] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2004. godine, 6. razred
[35] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2005. godine, 6. razred

9. Zadatak[36]

Koliki je poluprečnik kružnice koja prolazi kroz tjeme C pravog ugla pravouglog trougla ABC, podnožje H visine CH i tačku K koja je središte katete BC, ako je hipotenuza trougla jednaka c.

Rješenje:

Prema uslovima zadatka je CK=KB. Kako je ΔCHB pravougli, to je CK=KB=KH. Sa M označimo presječnu tačku kružnice i katete AC. Kako ie $\angle$ MCK=90º, to je MK prečnik kružnice. Kako su tetive KC i KH jednake, to je prečnik normalan na CH, što znači da je MK$\parallel$AB. Prema tome MK je srednja linija ΔABC, tj.
$MK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$. Traženi poluprečnik je $r = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{4}c$ (slika 18.).



Slika 18.

10. Zadatak[37]

Konstruisati pravilan šestougao čija je površina jednaka zbiru površina tri data pravilna šestougla sa stranicama a_1, a_2 i a_3.

Rješenje:

Data su tri pravilna šestougla sa stranicama a_1, a_2 i a_3. Potrebno je konstruisati pravilan šestougao tako da njegova površina bude jednaka zbiru površina datih pravilnih šestouglova, tj. $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$. Ako sa a označimo stranicu traženog šestougla, biće $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ (*). Duž a se može lako konstruisati primjenom Pitagorine teoreme. Obilježimo sa t^2 zbir prva dva sabirka desne strane napisane jednakosti (*), tj. $t^2 = a_1^2 + a_2^2$, pa se t konstruiše kao hipotenuza pravouglog trougla sa katetama a_1 i a_2. Dalje je $a^2 = t^2 + a^2$, pa se a konstruiše kao hipotenuza pravouglog trougla sa katetama t i a_3. Na kraju se konstruiše šestougao stranice a.

---

[36] Regionalno takmičenje učenika osnovnih škola, 2004. godine, 7. razred
[37] Regionalno takmičenje učenika osnovnih škola, 2006. godine, 7. razred

11. Zadatak[38]

Data je kružnica K (O, r) i dvije njene uzajamno normalne tetive BC i DE. Dokazati da je $AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 = 4r^2$, ako je A tačka presjeka tetiva BC i DE.

Rješenje:

Iz trougla MOE slijedi:

$r^2 = EM^2 + OM^2$, $r^2 = (\frac{1}{2}ED)^2 + (\frac{1}{2}BC - AB)^2$,

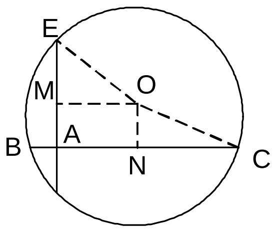
$r^2 = \frac{1}{4}(AD + AE)^2 + (\frac{1}{2}(AB + AC) - AB)^2$, pa je

(*) $\quad 4r^2 = (AD + AE)^2 + (AC - AB)^2$.

Iz trougla ONC slijedi:

$r^2 = ON^2 + NC^2$; $r^2 (\frac{1}{2}ED - AD)^2 + (\frac{1}{2}BC)^2$;

$r^2 = (\frac{1}{2}(AD + AE) - AD)^2 + \frac{1}{4}(AB + AC)^2$,



Slika 19.

pa je (**) $\quad 4r^2 = (AE - AD)^2 + (AB + AC)^2$. Sabiranjem (*) i (**) dobijamo

$$8r^2 = (AD + AE)^2 + (AC - AB)^2 + (AE - AD)^2 + (AB + AC)^2$$

Sređivanjem poslednje jednakosti dobijamo traženu jednakost (slika 19.).

12. Zadatak[39]

Dužine kateta pravouglog trougla su 1 i 3. Nad hipotenuzom tog trougla je konstruisan kvadrat tako da tjeme pravog ugla trougla ne pripada kvadratu. Naći rastojanje tjemena C pravog ugla od centra kvadrata.

Rješenje:

Podnožje normale iz tačke O (presjek dijagonala kvadrata) na prave CA i CB su tačke D i E. Uočimo trouglove EBO i DAO i dokažimo njihovu podudarnost. Iz podudarnosti slijedi da je OD=OE, odnosno da je četvorougao ECDO kvadrat čiju dužinu dijagonale treba izračunati $x = |CO|$=? Hipotenuza ABC je $c = \sqrt{10}$, a dijagonala kvadrata određenog je $d = 2\sqrt{5}$. Označimo stranice kvadrata ECDO sa y, pa je

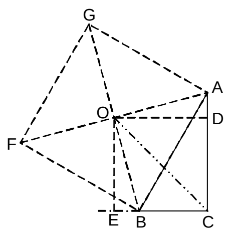
$x^2 = 2y^2$ ....(1)

Iz pravouglog trougla Δ DAO postavimo jednačinu

$y^2 = (\frac{d}{2})^2 - (3 - y)^2$ ....(2)

Rješavanjem jednačine (2) dobijamo da je $y = 2$ ili $y = 1$.

Očigledno je |CD| = |CE|=2, pa zamjenom u jednačinu (1) dobijamo da je traženo rastojanje $x = 2\sqrt{2}$. (slika 20.)



Slika 20.

[38] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2003. godine, 7. razred

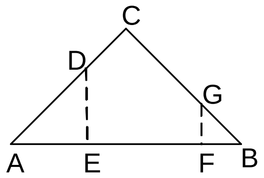
[39] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2004. godine, 7. razred

13. Zadatak[40]

Neka je ABC jednakokraki trougao sa pravim uglom kod tjemena C. Tačka D pripada kateti AC, tačka G pripada kateti BC, a tačka E i F su redom podnožja normala iz D i G na hipotenuzu AB. Ako je AC=1 i ako se površine trougla BGF i petougla CDEFG i trougla ADE odnose kao 2 : 2 : 1, izračunati obim petougla CDEFG.

Rješenje:

Označimo sa P površinu ΔABC, sa P_1 površinu petougla ΔBFG, sa P_2 površinu petougla CDEFG i sa P_3 površinu ΔAED. Data je kateta jednakokrakog-pravouglog ΔABC: $a=1$. Tada je $P=\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{1}{2}$.



Slika 21.

Iz uslova zadatka je $P=P_1+P_2+P_3=5P_3$. Trouglovi BGF i AED su jednakokrako-pravougli, pa je FG=FB i ED=EA, odakle je

(1) FG+FE+ED=$\sqrt{2}$.

Neka je BF=a_1 i BG=c_1. Tada je $P_1=\dfrac{a_1^2}{2}$, a kako je $P_1=\dfrac{2}{5}P$ to je $\dfrac{a_1^2}{2}=\dfrac{2}{5}\dfrac{a^2}{2}$,

odnosno $a_1^{\,2}=\dfrac{2}{5}$, tj. $a_1=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ i $c_1=BG=a_1\sqrt{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. Sada je

(2) GC=BC-BG=1-$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$=$\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}$.

Slično, iz ΔAED je $P_3=\dfrac{a_2}{2}$ i $P_3=\dfrac{1}{5}P$ (pri čemu $a_2=ED)$, pa je $a_2^{\,2}=\dfrac{1}{5}$, odnosno

$a_2=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, a $c_2=AD=a_2\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, odakle je

(3) CD=AC-AD=1-$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$=$\dfrac{5-\sqrt{10}}{5}$.

Konačno, sabiranjem (1), (2) i (3) dobijamo obim petougla CDEFG (slika 21.):

O=FG+FE+ED+GC+CG=$\sqrt{2}+\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}+\dfrac{5-\sqrt{10}}{5}=\dfrac{10+5\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10}}{5}$.

[40] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2003. godine, 7. razred

14. Zadatak[41]

Neka je ABC jednakokraki trougao kod koga je AC=BC i ugao pri vrhu C jednak je 20º. Ako je M tačka na kraku BC i CM =AB, odrediti veličinu $\angle$AMB.

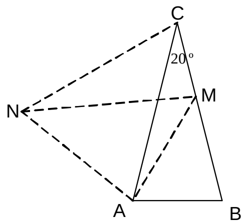
Rješenje:

Neka je N tačka takva da je ΔMCN$\cong$ ΔABC(N je sa iste strane prave BC sa koje je i tačka A).

$\angle$NCA=$\angle$NCM-$\angle$ACM=80º -20º=60º.

Kako je CN=CA trougao ACN je jednakostraničan, pa je i $\angle$CNA=60º.

Slijedi da je
$\angle$MNA=60º-20º=40º.



Slika 22.

Trougao AMN je jednakokrak jer je AN=MN. Njegov ugao pri vrhu N je $\angle$MNA=$\angle$CNA-$\angle$CNM=60º -20º=40º, pa je ugao pri osnovici $\angle$NMA=70º. Kako je $\angle$CMA=70º +80º =150º, pa je
$\angle$AMB=180º -150º =30º (slika 22.).

***15.* Zadatak**[42]

Data je kocka ivice a cm. Neka je S jedno tjeme te kocke.
a) Izračunati površinu piramide čije su tri ivice kocke koje prolaze iz tačke S.
b) Odrediti odnos zapremina pomenute piramide i preostalog dijela kocke.

Rješenje:

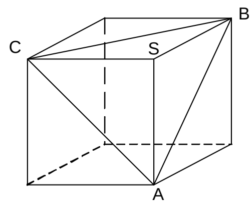
a) Površina piramide se sastoji od tri pravougla trougla čije katete imaju dužine a cm i jednakostraničnog trougla ABC, stranice $a\sqrt{2}$ cm. Otuda je

$$P = 3\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3})cm^2$$

b) Za izračunavanje zapremine piramide za osnovicu uzmimo trougao ABS, a za visinu duž CS.

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a = \frac{1}{6}a^3, \quad V_2 = a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{5}{6}a^3,$$

pa je $V_1 : V_2 = 1:5$ (slika 23.).



Slika 23.

[41] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2005. godine, 7. razred
[42] Regionalno takmičenje učenika osnovnih škola, 2003. godine, 8. razred

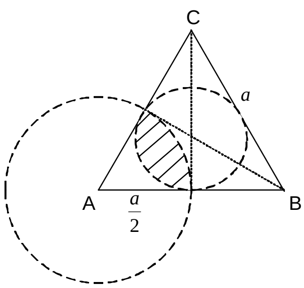
16. Zadatak[43]

U jednakostraničnom trouglu stranice a upisana je kružnica k_1. Jedno tjeme trougla je centar kružnice k_2 poluprečnika $\frac{a}{2}$. Izračunati površinu lika između k_1 i k_2.

Rješenje:

Površinu dijela između kružne linije (slika 24.) dobijamo kao razliku površina kružnog isječka i trećine razlike površine trougla i kruga k_1.

$$P = (\frac{a}{2})^2 \pi \frac{60}{360} - \frac{(\frac{a}{2})^2\sqrt{3} - (\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2})^2\pi}{3} = \frac{a^2\pi}{24} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} + \frac{a^2\pi}{36} = \frac{a^2}{12}(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}).$$



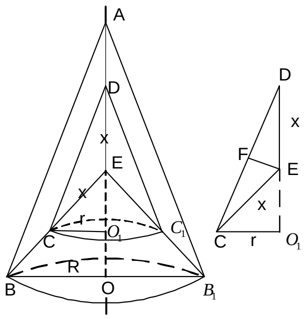
Slika 24.

17. Zadatak[44]

Jednakokraki trapez rotira oko ose koja sadrži jedan njegov krak. Izračunati površinu i zapreminu tako nastalog tijela, ako osnovice trapeza imaju dužine $20\sqrt{3}cm$ i $6\sqrt{3}cm$, a krak $14cm$.

Rješenje:

Sa slike 25. se uočava da se površina rotacionog tijela može izračunati po formuli $P_T = M_1 + M_2 + M_3 - M_4$ površine omotača koji nastaju rotacijom trouglova ΔABB$_1$, ΔDCC$_1$, ΔEBB$_1$, i ΔECC$_1$.



Slika 25.

[43] Regionalno takmičenje učenika osnovnih škola, 2006. godine, 8. razred
[44] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2003. godine, 8. razred

Kako je ΔABE ~ΔDCE, slijedi da je $20\sqrt{3}:6\sqrt{3}=(14+x):x$, pa je $x=6$. Kako je , dalje, DF=$\frac{1}{2}$CD=$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{3}=3\cdot\sqrt{3}$, tada se iz pravouglog trougla ΔDEF dobija FE^2= $x^2-DF^2=9$, pa je FE=3.

IZ ΔCDO$_1$ ~ΔDFE, slijedi $CD:x=r:FE$, pa je $6\sqrt{3}:6=r:3$, tj. $r=3\sqrt{3}$. Na sličan način se dobija $R=10\sqrt{3}$. Kako su izvodnice omotača M$_1$, M$_2$, M$_3$ i M$_4$ odgovarajuće stranice zadanog trapeza, tada se mogu izračunati njihove površine. Sprovodeći računanje tih površina dobija se $P_T=2\pi(327+91\sqrt{3})cm^2$.

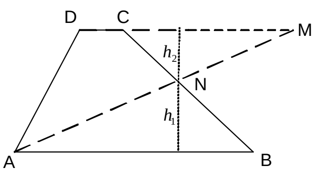
Postupajući na sličan način kao kod izračunavanja površine, zapreminu rotacionog tijela izračunavamo po formuli $V_T=V_1-(V_2+V_3)+V_4$, gdje su V_1,V_2,V_3 i V_4zapremine kupa koje nastaju rotacijom trouglova ΔABB$_1$, ΔDCC$_1$, ΔEBB$_1$, i ΔECC$_1$. Pošto se mogu izračunati visine tih kupa, dobija se da je $V_T=1946\pi cm^3$.

18. Zadatak[45]

Osnovice trapeza su AB=50cm i CD=30cm. Osnovica CD produžena je preko tjemena C do tačke M. Koliko je rastojanje CM, ako se zna da duž AM dijeli trapez na dvije figure jednakih površina?

Rješenje:

Kako je $P_{\Delta ABN}=P_{ANCD}=\frac{1}{2}P_{ABCD}$, (slika 26.) to je $\frac{1}{2}ABh_1=\frac{1}{4}(AB+CD)(h_1+h_2)$. Dakle, $25h_1=\frac{1}{4}\cdot 80(h_1+h_2)$, pa je $h_1=4h_2$, odnosno $h_1:h_2=4:1$.



Slika 26.

Kako je ΔABM ~ΔCMN, to je AB:CM=$h_1:h_2=4:1$. Znači, CM=$\frac{1}{4}AB=12{,}5cm$.

19. Zadatak[46]

Osnovna ivica pravilne trostrane prizme ABCDA$_1$B$_1$C$_1$D$_1$ je AB =a, a visina je CC$_1$=$a\sqrt{2}$. Neka je α ravan određena tačkama A,C$_1$ i središtem ivice BB$_1$, a β ravan određena tačkama C, B$_1$ i središtom ivice AB. Odrediti dužinu duži koja pripada presjeku ravni α i β i nalazi se unutar prizme.

[45] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2004. godine, 8. razred
[46] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2004. godine, 8. razred

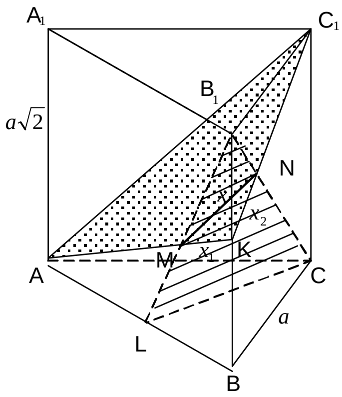
Rješenje:

Neka je K središte bočne ivice BB_1 i L središte osnovne ivice AB (slika 27.). Presjek prve ravni i prizme je ΔAKC_1, a presjek druge ravni i prizme je ΔLCB_1. Uočeni trouglovi imaju presjek duž MN= x čiju dužinu treba izračunati. Iz ΔACC_1, ΔABK i ΔKC_1B_1 izračunajmo redom

$AC_1^{\,2}=AC^2+CC_1^{\,2}=a^2+2a^2=3a^2 \Rightarrow AC_1=a\sqrt{3}$,

$AK^2=a^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2=a^2+\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{2}a^2 \Rightarrow AK=a\frac{\sqrt{6}}{2}$,

$C_1K^2=a^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2=a^2+\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{2}a^2 \Rightarrow C_1K=a\frac{\sqrt{6}}{2}$,



Slika 27.

Posmatrajmo prvo bočnu stranu ABB_1A_1, odnosno ΔABB_1. Duž MK= $x_1=\frac{1}{3}AK=a\frac{\sqrt{6}}{6}$, jer je tačka M težište ΔABB_1 i MK trećina težišne duži AK. Posmatrajmo zatim bočnu stranu BCC_1B_1, odnosno ΔBC_1B_1. KN= $x_2=\frac{1}{3}C_1K=a\frac{\sqrt{6}}{6}$, jer je tačka N težište ΔBC_1B_1 i KN je trećina njegove težišne duži C_1K. Sada možemo zaključiti da je $\Delta AKC_1 \sim \Delta MKN$, odakle je AC_1 : MN=AK : MK=KC_1 : KN, odnosno $a\sqrt{3}:x=3:1$, $3x=a\sqrt{3}$, $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, MN=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

20. Zadatak[47]

Osnovna ivica pravilne trostrane piramide je 3dm. Piramida je presječena sa ravni koja sadrži jednu osnovnu ivicu i normalna je na naspramnu bočnu ivicu i pri tome je dijeli u odnosu 9 : 8, računajući od tjemena osnove. Izračunati površinu piramide.

Rješenje:

Trouglovi AOS i ADE (slika 28.) su slični jer je $\angle AOS = \angle DEA = 90^o$ (iz uslova zadatka) i $\angle OAS = \angle ADE$ (kao uglovi sa normalnim kracima). Iz uočene sličnosti postavimo proporciju AD : AS = AE: AO, gdje djelimičnom zamjenom dobijamo:

$a^2=2\cdot AE\cdot AS$ (1)

---

[47] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2005. godine, 8. razred

Dalje iz uslova zadatka imamo AE : ES = 9 : 8 i AS = AE + ES, pa je $ES = \frac{8}{9}AE$ i $AS = \frac{17}{9}AE$. Zamjenom u jednakost (1) dobijamo

$AE = \frac{9}{\sqrt{34}}$ i $AS = \frac{17}{\sqrt{34}}$

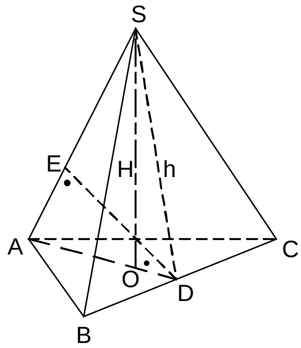
Iz pravouglog trougla AOS i pomoću Pitagorine teoreme je $OS^2 = AS^2 - AO^2$, gdje je

$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, dobijamo $OS^2 = \frac{11}{2}$.

Primjenom Pitagorine teoreme na trougao ODS koji je takođe pravougli, $SD^2 = OD^2 - OS^2$, gdje je

$OD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, izračunajmo visinu bočne strane $SD = \frac{5}{2}$. Konačno zamjenom u formuli

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a \cdot SD}{2} = \frac{9}{4}(\sqrt{3} + 5)dm^2$$



Slika 28.

4. LOGIKA I KOMBINATORIKA

4.1. Logički i kombinatorni zadaci

Matematička logika i kombinatorika se izučavaju u srednjoj školi, a samo neki njihovi elementi u dodatnoj nastavi matematike, odnosno kroz izborni predmet Matematička radionica – kombinatorika i elementarna teorija brojeva, u VII razedu devetogodišnje osnovne škole. Na našim takmičenjima, pored ostalih, zadaju se logički i kombinatorni zadaci za čije rješavanje je dovoljno matematičko znanje koje se stiče tokom osnovnog školovanja.

Učenika osnovnoškolskog uzrasta najlakše je zainteresovati za matematiku ako ga stavimo u situaciju da rješava raznovrsne i zanimljive zadatke. Pri rješavanju nestandardnih zadataka dolazi do izražaja logičko i stvaralačko mišljenje i osjećaj zadovoljstva kad se samostalno riješi teži zadatak. Zadovoljstvo je kruna umnog napora, procesa mišljenja i zaključivanja kroz koje je učenik prošao. Matematički problemi nas uče pažljivom čitanju teksta, pravilnom uočavanju bitnog, tačnom izražavanju i zaključivanju. Na početku svake teme preporučljivo je učenicima zadavati karakteristične zadatke i na taj način ih uvoditi u metodologiju rješavanja nestandardnih zadataka.

U ovom tekstu je izabran jedan broj raznovrsnih, karakterističnih nestandardnih zadataka sa naših takmičenja, koji mogu pomoći da se učenici lakše uvedu u metodologiju njihovog rješavanja.

Nastavnikova uputstva, po pravilu, treba da podstiču i razvijaju kreativnost kod svakog učenika pojedinačno s ciljem razvijanja njegovih matematičkih sposobnosti.

4.2. Logički zadaci

Logički zadaci, u najširem smislu, nijesu samo klasični logički zadaci već i bilo koji drugi gdje je rješenje dobijeno na osnovu uvjerljivog logičkog rasuđivanja i sa malo izračunavanja. To su glavolomke, odnosno zadaci za razvijanje oštroumnosti.

Logički zadaci pripadaju raznim oblastima matematike: zadaci o „lažovima“; matematički rebusi; tekstualni zadaci; zadaci sa interesantnim svojstvima brojeva itd.

Dirihleov princip

Princip nazvan u čast njemačkog matematičara P. G. L. Dirichlet (1805 – 1859), koristimo u rješavanju raznih zadataka, a naročito za dokazivanje postojanja objekata sa određenim svojstvom.

Dirhleov princip se najčešće iskazuje na popularan način u verziji „zečeva i kaveza“. *Ako je u m kaveza smješteno n zečeva, pri čemu je $n > m$, onda mora postojati kavez u kojeme su smještena bar dva zeca.*

U matematički strožijoj formulaciji Dirihleov princip se može iskazati na sljedeći način: **Ako se skup od n elemenata razbijen na m disjunktnih (nepresijecajućih) djelova, koji nemaju zajedničkih elemenata, gdje je $n > m$, onda će u krajnjem slučaju u jednom dijelu biti više od jednog elementa.** Dirihleov princip se često primjenjuje u situacijama koje na pvi pogled nemaju veze sa zečevima i kavezima i sl. Tako pomoću Dirihleovog principa je moguće rješavati zadatke iz djeljivosti brojeva, geometrije, skupova, nizova brojeva itd. pri čemu je bitno shvatiti smisao zadatka i rasuđivati postupno i logički.

Primjer: Petnaest dječaka je sakupilo 100 oraha. Dokažite da su neka dva od njih sakupili jednak broj oraha.

Rješenje:

Pretpostavimo da nije tako, očigledno je da dječaci nijesu sakupili manje od $0+1+2+\cdots+14=105$ oraha – protivurječnost. Važi tvrđenje: Neka dva od njih su sakupili jednak broj oraha.

4.3. Kombinatorni zadaci

Oblast matematike koja se bavi izučavanjem mogućih rasporeda, metoda za prebrojavanje i pravila grupisanja elemenata najčešće konačnih skupova zove se **kombinatorika**.

Prilikom rješavanja zadataka preporučljivo je koristiti pogodne grafičke interpretacije npr. crtanje odgovarajućeg stabla i pogodne načine zapisivanja rasporeda.

Primjer: Pred vama je „TROUGAO“ sastavljen od riječi TROUGAO:

T	**R**	O	U	G	A	O
R	**O**	U	G	A	O	
O	**U**	**G**	**A**	O		
U	G	A	**O**			
G	A	O				
A	O					
O						

Na koliko načina je moguće, krećući se od slova do njemu susjednog slova, pročitati riječ TROUGAO? Na slici je dat jedan od mogućih načina.

Rješenje:

Početno slovo je T u lijevom gornjem uglu. Do sljedećeg slova R možemo doći na dva načina (idući u desno i dolje), TR se može pročitati na dva načina. TRO možemo pročitati na $2\cdot 2=4$ načina, jer se od slova R do sljedećeg slova O može stići na dva načina. Ova se situacija ponavlja u svakom koraku, pa se riječ TROUGAO, idući od slova do njemu susjednog slova možemo pročitati na $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=64$ načina.

Mnogi kombinatorni zadaci se mogu riješiti pomoću dva osnovna pravila: pravilo zbira i pravilo proizvoda.

***Pravilo zbira**: Ako je presjek konačnih skupova A i B prazan i ako skup A ima m elemenata, a skup B n to je broj elemenata njihove unije jednak $m+n$.*

Primjer:

Na jednoj polici u biblioteci je 30 različitih knjiga, a na drugoj 40 takođe različitih knjiga. Knjige na drugoj polici su različite od knjiga na prvoj polici. Na koliko načina je moguće izabrati jednu knjigu?

Rješenje:

Knjigu sa prve police je moguće izabrati na 30 načina, a sa druge na 40 načina. Na kraju knjigu je moguće izabrati na $30+40=70$ načina.

***Pravilo proizvoda**: Ako u skupu A ima m, a u skupu B n elemenata tada izbor po jednog elementa iz skupova A i B možemo uraditi na $m \cdot n$ načina.*

Primjer: Ksenija ima tri suknje i četiri bluze. Na koliko načina ona može da se obuče?

Rješenje:

Suknju može izabrati na 3, a bluzu na 4 načina. Ksenija može da se obuče na $3 \cdot 4 = 12$ načina.

4.4. Zadaci sa rješenjima

1. Zadatak[48]

Kako se može pomoću dvije posude od $3l$ i $7l$ sa česme u čajnik nasuti tačno $2l$ vode?

Rješenje:

Tok punjenja odnosno presipanja pogodno je predstaviti sa sljedećom šemom:

Redni broj punjenja,odnosno presipanja	Punjenje, odnosno presipanje	Broj litara u sudu od 3 litra	Broj litara u sudu od 7 litara
1	Punjenje sa česme suda od 3l.	$3l$	$0l$
2	Presipanje iz suda od 3l u sud od 7l.	$0l$	$3l$
3	Punjenje sa česme suda od 3l.	$3l$	$3l$
4	Presipanje iz suda od 3l u sud od 7l.	$0l$	$6l$
5	Punjenje sa česme suda od 3l.	$3l$	$6l$
6	Presipanje iz suda od 3l u sud od 7l.	$2l$	$7l$
7	Presipanje iz suda od 3l u čajnik.	$0l$	$7l$

[48] Memorijal Aleksandar - Aco Pavićević; Bar, 2006. godine, 5. razred

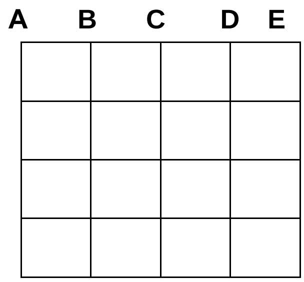
2. Zadatak[49]

Kvadrat stranice $a=4cm$ podijeljen je na kvadratne centimetre. Nacrtaj sliku i prebroj koliko ima duži, a koliko kvadrata na tako dobijenoj kvadratnoj mreži?

Rješenje:

Nacrtajmo kvadrat (slika 29.) i podijelimo ga na kvadratne centimetre. U dobijenoj mreži linija (duži) imamo 10 duži. Svaka duž je podijeljena na manje duži sa 5 tačaka. Označimo tačke na jednoj stranici sa A, B, C, D i E, pa duži možemo brojati po nekom sistemu:

AB, AC, AD, AE;
BC, BD, BE;
CD, CE;
DE.



Slika 29.

Znači na jednoj duži npr. AE ima: $4+3+2+1=10$ duži. Na svih 10 duži ima ukupno $10\cdot 10=100$ duži.

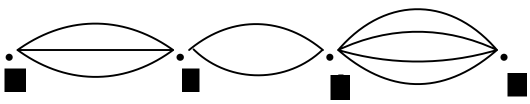
Broj kvadrata čija je stranica $1cm$ je 4·4, stranica $2cm$ je 3·3, stranica $3cm$ je 2·2 i jedan kvadrat $4cm$. Dakle, kvadrata ukupno ima: $4\cdot 4+3\cdot 3+2\cdot 2+1\cdot 1=30$.

3. Zadatak[50]

Iz grada A u grad B vode 3 puta , iz grada B u grad C vode 2 puta a iz grada C u grad D 4 puta. Na koliko se različitih načina može stići iz grada A u grad D preko gradova B i C bez vraćanja u grad kroz koji smo jednom prošli?

Rješenje:

Situacija opisana u zadatku prikazana je slikom 30.

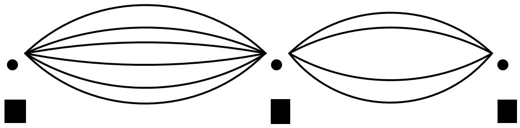


Slika 30.

Iz grada A u grad C preko grada B stiže se na $3\cdot 2=6$ načina. Grad B izostavljamo iz dalje analize.

[49] Memorijal Aleksandar - Aco Pavićević; Bar, 2007. godine, 4. razred
[50] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2004. godine, 6. razred

Nova situacija (kada iz A stižemo u D preko grada C) prikazana je na slici 31.



Slika 31.

Sa slike31. zaključujemo da iz grada A u grad D preko C stižemo na $6 \cdot 4 = 24$ različita načina.

4. Zadatak[51]

Da li je moguće od bilo kojih 2005 prirodnih brojeva izabrati 25 tako da razlika između svaka dva od njih bude djeljiva sa 83? Dokazati.

Rješenje:

U odnosu na dijeljenje sa 83 bilo kojih 2005 prirodnih brojeva možemo rasporediti u 83 kategorije: u prvoj su brojevi koji su djeljivi sa 83, u drugoj su oni koji daju ostatak 1, u trećoj su oni koji daju ostatak 2, ...u osamdeset trećoj su oni koji daju ostastak 82.

Budući da je $2005 = 24 \cdot 83 + 13$, to znači da postoji kategorija u kojoj ima bar 25 brojeva takvih da je razlika između svaka dva od njih djeljiva sa 83 (Dirihleov princip).

Dokažimo da je razlika između bilo koja dva iz iste kategorije djeljiva sa 83. Neka su $a \ i \ b$ prirodni brojevi koji pri dijeljenju sa 83 imaju jednake ostatke i neka je $b > a$. Iz jednakosti $a = k_1 \cdot 83 + r \ i \ b = k_2 \cdot 83 + r$, gdje je $k_1, k_2 \in N_0$ i $k_2 > k_1$, a $r \in \{0,1,2,...,82\}$, pa je $b - a = (k_2 - k_1) \cdot 83$. Prema tome razlika $b - a$ je djeljiva sa 83. Dakle, moguće je, a i dokazali smo da je razlika bilo koja dva od njih djeljiva sa 83.

5. Zadatak[52]

Ukupna masa nekoliko sanduka je 10 tona, pri čemu je masa svakog sanduka manja od jedne tone. Koliko je najmanje kamiona, nosivosti tri tone potrebno da bi se cio teret od 10 tona prevezao odjednom (u jednoj turi)?

Rješenje:

Očigledno je neophodno 4 ili više kamiona nosivosti 3 tone. Međutim, ako je teret od 10 tona raspoređen u 13 jednakih sanduka, dakle, svaki mase $\frac{10}{13}$ tona, tada se ne može sav teret natovariti na 4 kamiona. Ako 13 sanduka tovarimo na 4 kamiona, tada po Dirihleovom principu, bar na jedan kamion moramo staviti 4 sanduka. Međutim, taj teret ne može ponijeti kamion nosivosti 3 tone, jer je $4 \cdot \frac{10}{13} = \frac{40}{13} > 3$ tone. Nije teško utvrditi da se na 5 kamiona može uvijek rasporediti 10 tona, tako što na 4 stavimo između 2 i 3 tone, a ostatak na peti kamion. Dakle, potrebno je raspolagati sa najmanje 5 kamiona.

---

[51] Regionalno takmičenje učenika osnovnih škola, 2005. godine, 7. razred
[52] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2000. godine, 8. razred

6. Zadatak[53]

Bračni par Mirko i Ljubica pozovu na večeru svoje prijatelje, tri bračna para. Pošto su svi stigli istovremeno, počeli su da se rukuju, pri čemu se svako rukovao sa nekoliko ljudi, a niko se nije rukovao sa svojim bračnim drugom. Kada su završili sa rukovanjem Mirko je pitao svakog (i Ljubicu) koliko se puta rukovao. Dobio je sedam različitih odgovora. Sa koliko se ljudi rukovala Ljubica?

Rješenje:

Očigledno je da je najveći broj rukovanja 6. Pošto je dato 7 različitih odgovora oni mogu biti: 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Neka se osoba A rukovala 6 puta. Ona se rukovala sa svima, osim sa sobom i sa svojim bračnim drugom. Ostali su se rukovali bar po jednom sem bračnog druga osobe A koja se nije rukovala (rukovala se 0 puta). Slično utvrđujemo da se u preostalom skupu (lica koja su se rukovala 1, 2, 3, 4 i 5 puta) nalazi osoba B koja se rukovala 5 puta (sa osobom A i sa još 4 osobe iz preostalog skupa). Bračni drug osobe B se rukovao samo jednom (sa osobom A, ali ne i sa osobom B). Od preostale 3 osobe (koje su se rukovale 2, 3 i 4 puta) osoba C rukovala se 4 puta (sa osobama A i B, sa Mirkom i sa Ljubicom), a bračni par osobe C se rukovao 2 puta (sa osobama A i B). Preostaje da se Ljubica rukovala 3 puta.

7. Zadatak[54]

7. Građani grada A uvijek govore istinu, građani grada B uvijek lažu, a svaki građanin grada C naizmjenično govori istinu i laž. Dežurni vatrogasac je telefonom primio poruku iz jednog od ovih gradova: „Kod nas je požar!“ - javio je jedan građanin. „Gdje?“- pitao je dežurni vatrogasac. „U gradu C“ - odgovorio je isti građanin. U koji grad treba da ode vatrogasna ekipa?

Rješenje:

Sigurno se nije javio građanin iz A, jer on govori istinu, pa ne bi mogao dati lažan odgovor „u gradu C“. Takođe, nije moguće da je zvao građanin iz C, jer bi u tom slučaju oba odgovora bila tačna, ili bi oba bila lažna, što se kosi sa pretpostavkom da je jedan odgovor tačan a drugi lažan. Znači, zvao je građanin iz grada B, koji uvijek laže. Iz prvog odgovora(„kod nas je požar“) slijedi da požar nije u B, a iz drugog („u gradu C“) da nije ni u C. Dakle, požar je u gradu A.

---

[53] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2001. godine, 6. razred
[54] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 2001. godine, 7. razred

8. Zadatak[55]

Na pravoj p dato je 8 tačaka, a na pravoj q, koja je paralelna pravoj p dato je 7 tačaka. Koliko ima: a) trouglova; b)četvorouglova, čija su tjemena neke od tih tačaka?

Rješenje:

a) Neka su $A, B, C, D, E, F, G\, i\, H$ tačke na pravoj p. Treba izbrojati, koliko je svega duži sa njima određeno.Tačka A sa svih 7 tačaka obrazuje 7 duži. Slično važi za tačku B, a i za tačke $C, D, E, F, G\, i\, H$. Na ovaj način dobijamo $8 \cdot 7 = 56$ duži. Međutim, tako su sve duži brojane dva puta – npr. duž AB brojali smo i kao duž BA. Zbog toga je na pravoj p određeno $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ duži. Na sličan način izbrojimo da je na pravoj q određeno $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ duži. Ako su dva tjemena na pravoj p, a treće tjeme može da bude bilo koja tačka sa prave q. Zaključujemo da takvih trouglova ima $28 \cdot 7 = 196$. S druge strane ako su dva tjemena na pravoj q, a treće tjeme bilo koje tjeme sa prave p, tada takvih trouglova ima $21 \cdot 8 = 168$. Ukupno trouglova ima 196 + 198 = 364.

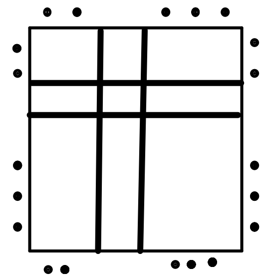
b) Izbrojali smo da na pravoj p ima 28, a na pravoj q 21 duž. Četvorouglovi koje treba da prebrojimo nastaju tako što krajnje tačke bilo koje duži sa prave p spojimo sa krajnjim tačkama bilo koje duži sa prave q. Dakle četvorouglova u ovom slučaju imamo $28 \cdot 21 = 588$.

9. Zadatak[56]

Na zemljištu oblika kvadrata $(1km \times 1km)$ raste borova šuma u kojoj ima 3110 stabala prečnika 50 cm. Dokazati da se u toj šumi može pronaći prostor za tenisko igralište dužine 25 m i širine 12 m, na kojem nema nijednog stabla.

Rješenje:

Kako je 1000:25,5=39,22 i 1000:125=80, zaključujemo da se na uočenu kvadratnu površinu može smjestiti $39 \cdot 80$=3120 pravougaonika dimenzija 12mX25m, pri čemu između njih postoje trake široke bar 50cm. Kako u šumi ima 3110 stabala, znači da postoji bar 10 pravougaonika u kojima nema stabala. Dakle, zaključujemo da se može naći prostor za izgradnju teniskog igrališta, a da se ne sijeku stabla (slika 32.).



Slika 32.

[55] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2005. godine, 7. razred
[56] Republičko takmičenje učenika osnovnih škola, 2002. godine, 7. razred

10. Zadatak[57]

Na šahovskom turniru svaki igrač je odigrao po jednu partiju sa preostalim učesnicima turnira. Koliko je šahista učestvovalo na turniru, ako je remijem (neriješeno) završeno 18 partija, što iznosi 40% ukupnog broja odigranih partija.

Rješenje:

Označimo sa m ($m \in N$) broj odigranih partija. Saglasno uslovima zadatka dobijamo jednačinu 40%m=18, čije je rješenje 45. Dakle, ukupno je odigrano 45 partija. Neka je n ($n \in N$) označava broj učesnika turnira. Bilo koji od šahista odigrao je n-1 partiju (igrao je sa svakim od preostalih n-1 šahista). Ukupno je odigrano $\frac{n(n-1)}{2}$ partija. Prema uslovima zadatka dobijamo jednačinu $\frac{n(n-1)}{2}$=45, pa je $n(n-1)$=90. Kako je $n(n-1)$=10·9, zaključujemo da je n=10, tj. da je na turniru učestvovalo 10 takmičara.

11. Zadatak[58]

Na jednom ostrvu postoji ukupno 9 država. Dokazati da na ovom ostrvu postoji država koja među njima ima paran broj prijateljskih država. Ako je država A prijateljska sa državom B, onda je i država B prijateljska sa državom A.

Rješenje:

Pretpostavimo da sve države imaju neparan broj prijateljskih država. Tada bi broj svih prijateljstava bio jednak zbiru 9 neparnih brojeva, što daje neparan broj. S druge strane, taj broj je očigledno djeljiv sa 2, jer mora biti jednak dvostrukom broju svih mogućih parova prijateljskih država. Dakle, postoji bar jedna država koja ima paran broj prijateljskih država.

[57] Regionalno takmičenje učenika osnovnih škola, 2003. godine, 7. razred
[58] Savezno takmičenje učenika osnovnih škola, 1997. godine, 6. razred