CRNA GORA
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

NAŠA ŠKOLA

Zadaci sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola u Crnoj Gori 2003 – 2007.

Podgorica
2014.

ZADACI SA MATEMATIČKIH TAKMIČENJA UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA U CRNOJ GORI 2003 – 2007. GODINE

Izdavač: Zavod za školstvo

Urednik: Pavle Goranović

Autor: Milonja Ojdanić

Štampa: Obod, Cetinje

Tiraž: 500 primjeraka

Podgorica 2014.

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISBN 978-9940-24-054-7
COBISS.CG-ID 26308880

Predgovor

Pred korisnicima ove zbirke su zadaci sa matematičkih takmičenja učenika osmogodišnjih osnovnih škola u Crnoj Gori u vremenu od 2003. do 2007. godine. Zbika sadrži zadatke, iz navedenog perioda, sa opštinskog, regionalnog, republičkog i saveznog takmičenja. Opštinsko takmičenje organizovano je samo u opštini Bar. Takmičenje se održavalo u okviru Memorijala „Aleksandar Aco Pavićević“.

Zadaci su uglavnom poznati u matematičkoj literaturi za učenike osnovnih škola, ali su u ovoj zbirci sortirani po godinama i nivoima takmičenja. Pisani su razumljivim logičkim stilom i jezikom, koji je prilagođen uzrastu i sposobnostima učenika i njihovim psihofizičkim i saznajnim mogućnostima. Poznato je da se do rješenja nekih zadataka dolazi na više načina, pa se nadamo da će učenici, zajedno sa nastavnicima, pronaći zanimljivije i jednostavnije postupke za njihovo rješavanje.

Nadamo se da će korišćenje ove zbirke u redovnoj i dodatnoj nastavi, kao i za samostalna vježbanja učenika, doprinijeti njihovom interesovanju za matematiku uopšte, a posebno za učešće učenika na takmičenjima iz ovog predmeta.

Podgorica, decembar 2014. godine

Milonja Ojdanić,
autor

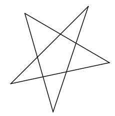
Sadržaj

Zadaci

Regionalno takmičenje 2003. godine

VI razred

1. Odredi brojeve a, b i c ako se zna da je njihov zbir veći od broja a za $\frac{5}{2}$, od broja b za $\frac{59}{6}$ i od broja c za $\frac{5}{3}$.
2. Ako jednom broju dopišemo zdesna 9, pa tako dobijeni broj podijelimo sa 3 i dobijenom količniku dopišemo zdesna 7, a zatim tako nastali broj podijelimo sa 11, dobićemo 67. Koji je to broj?
3. Dva učenika su sebi kupili po kljigu. Prvi je za knjigu dao $\frac{5}{9}$ svoje sume novca, a drugi $\frac{2}{3}$ svoje sume. Prije kupovine prvi učenik je imao 12€ manje od drugog, a poslije kupovine su im ostale jednake sume novca. Koliko je novaca imao svaki od njih prije kupovine knjige?
4. Koliki je zbir unutrašnjih uglova u šiljcima petokrake zvijezde oblika.



5. U pravouglom trouglu ABC povučena je hipotenuzina visina CD. Neka su središta kateta AC i BC redom tačke E i F. Dokazati da je ugao EDF prav.

VII razred

1. Izračunaj vrijednost količnika Q(x)=$\dfrac{x^4-2004x^3+2004x^2-x}{x-1}$ za $x=2003.$
2. Pokazati da je rješenje jednačine $\frac{1}{2}x+\sqrt{(\sqrt{7}-4)^2}=\sqrt{32-10\sqrt{7}}$ prirodan broj.
3. Osnovice jednakokrakog trapeza su dužine 8 cm i 10 cm, njegove dijagonale su su uzajamno normalne. Izračunati obim i površinu trapeza.
4. Dat je trougao ABC (AB≠AC). Dokazati da se simetrala stranice BC i simetrala ugla BAC sijeku u tački koja pripada kružnici opisanoj oko trougla ABC.
5. Na šahovskom turniru svaki igrač je odigrao po jednu partiju sa preostalim učesnicima turnira. Koliko je šahista učestvovalo na turniru, ako je remijem(neriješeno) završeno 18 partija, što iznosi 40% ukupnog broja odigranih partija.

VIII razred

1. Ako dvocifrenom broju dopišemo slijeva i zdesna jedinicu, tada je dobijeni broj 21 put veći od početnog dvocifrenog broja. Odrediti taj dvocifren broj.

2. Ako su dužine dviju stranica trougla 6 cm i 12 cm, a ugao između njih 120° . Kolika je dužina simetrale tog ugla(to je dužina od tjemena ugla do presjeka simetrale sa naspramnom stranicom).

3. Dokazati da je izraz $\frac{a}{3}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{6}$ ima cjelobrojnu vrijednost za svaki cijeli broj a.

4. Data je kocka ivice a cm. Neka je S jedno tjeme te kocke.
   a) Izračunati površinu piramide čije su tri ivice kocke koje prolaze iz tačke S.
   b) Odrediti odnos zapremina pomenute piramide i preostalog dijela kocke.

5. Prava p prolazi kroz tačke K(6,-2) i S(2,1). Odredi:
   a. Jednačinu te prave;
   b. Dužinu odsječka te prave između koordinantnih osa;
   c. Odredi udaljenost koordinatnog početka O od te prave.

Republičko takmičenje 2003. godine

VI razred

1. Za mjerenje temperature, pored Celzijusove skale, upotrebljava se i Farenhajtova skala kojoj je teparatura mržnjenja vode 32ºF, a temparatura ključanja vode 180ºF. Postoji li temparatura koja ima istu vrijednost na Celzijusovoj skali i na Farenhajtovoj skali?

2. Težišna duž i visina iz tjemena A u trouglu ABC dijele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla ABC?

3. Za trougao ABC je AC=BC, a za tačke P i R sa stranice AC i tačku Q sa stranice BC je CR=RQ=QR=PB=BA. Izračunati $\angle$ ACB.

4. Zapis proizvoda dva trocifrena broja se sastoji od nekoliko 3(trojki). O kojim trocifrenim brojevima je riječ.

5. Broj 10 dopiši slijeva i zdesna po jednu cifru tako da dobijeni broj bude djeljiv sa 36.

VII razred

1. Kojom cifrom se završava najmanje pozitivno cjelobrojno rješenje nejednačine $x^4-9\geq 8(9+9^2+9^3+9^4+\cdots 9^{2001}+9^{2002}+9^{2003})$?

2. Ako su a, b i c cijeli neparni brojevi, tada je jedna od razlika $ab-1, ac-1$ ili $bc-1$ djeljiva sa 4. Dokazati.

3. Data je kružnica K(O,r) i dvije njene uzajamno normalne tetive BC i DE. Dokazati da je $AB^2+AC^2+AD^2+AE^2=4r^2$, ako je A tačka presjeka tetiva BC i DE.

4. Osnovice pravouglog trapeza su 9cm i 4cm. Izračunati površinu trapeza ako se njegove dijagonale sijeku pod pravim uglom.

5. U ravni je raspoređeno 100 različitih tačaka. Među njima je 10 šestorki kolinearnih tačaka (tačke su kolinearne ajo pripadaju istoj pravoj). Osm navedenih nema drugih kolinearnih tačaka. Koliko je pravih određeno sa tih 100 tačaka?

VIII razred

1. Ako za pozitive realne brojeve važi $a+b=1$ dokazati da je

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2+(c+\frac{1}{c})^2 \geq \frac{25}{2}$$

2. Koji četvorocifren broj pri dijeljenju sa 151 daje ostatak 40, a pri dijeljenju sa 152 daje ostatak 27.

3. Bazen dubine 2m ima oblik kvadra. Cijev sa toplom vodom puni polvinu bazena za 10 minuta, a cijev sa hladnom vodom za isto vrijeme napuni bazen do 0,5m. Za koje vrijeme će bazen biti napunjen do visine od 1,25m ako se cijev sa hladnom otvori u trenutku kada je cijev sa toplom vodom napunila bazen do visine 0,75m?

4. Osnovica AB trapeza ABCD je tri puta veća od osnovice CD. Ako se dijagonale tog trapeza sijeku pod pravim uglom u tački O. Koliko je puta njegova površina veća od površine trougla OCD?

5. Jednakokraki trapez rotira oko ose koja sadrži jedan njegov krak. Izračunati površinu i zapreminu tako nastalog tijela, ako osnovice trapeza imaju dužine $20\sqrt{3}cm$ i $6\sqrt{3}cm$, a krak$14cm$.

Savezno takmičenje 2003. godine

VI razred

1. Dokazati da je broj $1^{2003}+2^{2003}+3^{2003}+4^{2003}+5^{2003}+6^{2003}+7^{2003}$ djeljiv sa 10.

2. Dokazati da je zbir dužina težišnih duži proizvoljnog trougla ABC veći od polovine njegovog obima, a manj od obima tog trougla.

3. Neka je ABC jednakokraki trougao (AC=BC), tačka O centar opisane kružnice oko trougla, a S centar kružnice koja dodiruje osnovicu AB i produžetak krakova. Ako su tačke O i S simetrične u odnosu na pravu AB, izračunati unutrašnje uglove trougla ABC.

4. Ukoliko sati između 12h i 13h prava, koja prolazi kroz podeoke 6h i 12h na brojčaniku , prestavlja simetralu ugla koji obrazuju kazaljke tog časvnika?

5. U svkoj klupi u jednom razredu sjedi najviše dva učenika. Poznato je da $\frac{2}{3}$ ukupnog broja dječaka sjedi u klupama sa $\frac{3}{5}$ ukupnog broja djevojčica. Koji dio učenika sjedi u paru dječak-djevojčica?

VII razred

1. Ako je a pozitivan broj koji je različit od 1, pokazati da $a+\frac{1}{a}$ nije cio broj.

2. Neka je ABC jednakokraki trougao sa pravim uglom kod tjemena C. Tačka D pripada kateti AC, tačka G pripada kateti BC, a tačka E i F su redom podnožija normala iz D i G na hipotenuzu AB. Ako je AC=1 i ako se površine trougla BGF i petougla CDEFG i trougla ADE odnose kao 2:2:1, izračunati obim petouglaCDEFG.

3. Ako su a,b,m,n prirodni brojevi, takvi da je $a+2003b=m^2$ i $b+2003a=n^2$, dokazati da su brojevi a i b djeljivi sa 3.

4. Na tabli su zapisani svi brojevi od 1 do 1000. Dva igrača A i B naizmjenično brišu po jedan broj, a počinje igrač A. Igra se završava kada na tabli ostaju dva broja. Ako je zbir ta dva broja djeljiv sa 3, pobjednik je igrač A, a ako nije, pobjednik je igrač B. Dokazati da igrač B ima pobjedničku strategiju.

5. Dat je pravilan šetougao ABCDEF i proizvoljna tačka P unutar tog šestougla. Dokazati da je zbir površina trouglova PAB, PCD i PEF jednaka zbiru površina trouglova PBC, PDF i PFA.

VIII razred

1. Ako su a,b i c dužine stranica trougla, dokazati da je

   $$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc$$

2. Kružnica k koja je upisana u oštar ugao dodiruje krakove tog ugla u tačkama M i N. Neka je P proizvoljna tačka većeg luka MN kružnice k, tačka A podnožije normale iz P na MN, a B i C podnožije normale iz P na krake tog ugla. Dokazati da je $PA^2=PB\cdot PC$.

3. Odredi ugao između dijagonalnih presjeka DBB_1D_1 i DAB_1C_1 kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$, koji sadrže dijagonalu DB_1.

4. Data su tvrđenja: a) broj $x+1$ je djeljiv sa y; b) $x=2y+5$; c) broj $x+y$ je djeljiv sa 3; d) $x+7y$ je prost broj. Odredi sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje su tačna tri od datih tvrđenja istinita, a jedno lažno.

5. Odredi sve prirodne brajeve n manje od 2003, za koje je moguće isjeći pravougaonik 2003xn na trake, tako da nikoje dvije nemaju istu dužinu. Pod trakom dužine k podrazumijeva se pravougaonik 1xk, gdje je k prirodan broj.

Regionalno takmičenje 2004. godine

VI razred

1. Konstruisati trougao ABC ako mu je dato: $c=5cm,\ a-b=3{,}5cm$ i $\beta=30°$.

2. Na fudbalskoj utakmici u jednom redu sjedišta na tribinama sjo je izvjestan broj gledalaca. Zatim je među svaka dva odnjih još po jedan gledalac. Ovakav način zauzimanja sjedišta ponovi se tri puta, pa je poslije toga u tom redu bilo 113 gledalaca. Koliko je gledalaca na početku sjelo u tom redu.

3. Riješi jednačinu $1-(2-(3-(4-\cdots-(1001-(1002-\frac{x}{2})))\cdots)=501$.

4. Naka su a, b i c tri racionalna broja od kojih je jeda pozitivan, jedan negativan, a jedan jednak nuli. Oderdi koji je od tih brojeva pozitivan, koji je negativan, a koji je jednak nuli ako je $\frac{a(b-c)}{b}\succ 0$

5. Duž AC i BD se sijeku u tčki O. Obim ΔABC jednak je obim ΔABD, a obim ΔACD jednak je obimu ΔBCD. Izračunati dužinu duži AO ako je BO=19cm.

VII razred

1. Odredi vrijednost polinoma

$$P(x, y)=x^{2003}+2004y$$

Ako je

$$x^2+4y^2+2x-12y+10=0$$

2. Šestocifreni broj počinje cifrom 1. Ako se prva cifra premjesti naposlednje mjest dobija se broj koji je tri puta veći odpoznatog. Koji je to broj?

3. Dužine stranice trougla su uzastopni prirodni brojevi (koji manji od 3). Dokaži da visina koja odgovara srednjoj po veličini stranici dijeli tu stranicu na odsječke čija je razlika4.

4. Koliki je poluprečnik kružnice koja prolazi kroz tjeme C pravog ugla pravouglog trougla ABC, podnožje H visine CH i tačku K koja je središte katete BC, ako je hipotenuza trougla jednaka c.

5. U sudu A nalazi se pomiješano 8 litara vode i 9 litara soka, a u sudu B 9 litara vode i 12 litara soka. Iz oba suda izvađeno je po 8 litara tečnosti. Zatim je 8 litara tečnosti iz suda A sipano u sud B, a 8 litara tečnosti iz suda B je sipano u sud A. Izračunati koliko će poslije toga biti soka u sudu A, a koliko vode u sudu B?

VIII razred

1. Od $\frac{3}{4}$ nekog štapa odsječene su njegove $\frac{2}{3}$. Preostali dio štapa dug je 55cm. Kolika je bila dužina cijelog štapa?

2. Odredi da li je veće z ili x ako se zna da je $\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}$, a $\frac{y}{y-x}=3$, gdje je x pozitivan broj.

3. Dat je razlomak $\frac{n+2}{n^2+4n+34}$, gdje je n prirodan broj. Ako se taj razlomak može skratiti prirodnim brojem d, onda je d djelilac broja 30. Dokazati.

4. U pravouglom trouglu ABC konstruisana je visina CD. Neka je tačka M sredina duži CD. I N sredina duži BD. Dokazati da je prava AM normalna na pravu CN.

5. Izračunati zapreminu pravilne trostrane piramide čije su bočne strane pravougli trouglovi, a mjerni broj x bočne ivice je rješenje jednaćine $\frac{6m+x}{5}=\frac{6x+m}{5}$, m je pozitivan broj.

Republičko takmičenje 2004. godine

VI razred

1. Riješiti jednačinu $\frac{a}{b}\cdot x-0{,}5=5$, gdje je a najmanji element skupa

A={ $m \mid m=\frac{n+12}{n}$ i $m,n\in Z$ } i b najveći elenent skupa B={ $y \mid y\in Q$ i $|3y-2|\le 6$ }

2. Mirko je zaboravio broj Aninog telefona. Sjeća se da je broj sedmocifren, da se sastoji samo od dvojki i trojki i da je dvojki više od trojki. Takođe se prisjetio da je broj telefona djeljiv sa 12. Pomognite Mirku da sazna broj Aninog telefona.

3. Iz tjemena A, B i C jednakostraničnog ΔABC povučene su poluprave Ax, By i Cz tako da je $\angle BAx = \angle CBy = \angle ACz = \alpha$. Dokazati da je ΔMNP jednakostraničan, pri čemu je $Ax \cap Cy = \{M\}$, $Ax \cap By = \{N\}$ i $By \cap Cz = \{P\}$.

4. Dokazati da je zbir unutrašnjih uglova na većoj osnovici trapeza manji od zbira unutrašnjih uglova na njegovoj manjoj osnovici.

5. Iz grada A u grad B vode 3 puta , iz grada B u grad C vode 2 puta a iz grada C u grad D 4 puta. Na koliko se različitih načina može stići iz grada A u grad D preko gradova B i C bez vraćanja u grad kroz koji smo jednom prošli?

VII razred

1. Dokaži, da ako je $b = \dfrac{a+c}{2}$ i $a \succ c$, ($a \neq c$) tada je izraz $ab + bc - ac - b^2$ pozitivan.

2. Dužine kateta pravouglog trougla su 1 i 3. Nad hipotenuzom iog trougla je konstruisan kvadrat tako da tjeme pravog ugla trougla ne pripada kvadratu. Naći rastojanje tjemena C pravog ugla od centra kvadrata.

3. Tačke K, L, M i N su redom središta stranica AB, BC, CD i DA konvesnog četvorougla ABCD. Duži KM i LN sijeku se u tački O. Dokaži da je zbir površina četvorougla AKON i CMOL jednak zbiru površina četvorougla BLOK i DNOM.

4. Jedna osnovna škola ima dva odjeljenja sedmog razreda. Od ukupnog broja učenika tog razreda 52% su dječaci, pri čemu dječaka u VII_1 ima 55% a u VII_2 45%. Koji procenat od ukupnog broja učenika u oba odjeljenja čine učenici VII_1 odjeljenja?

5. Odredi cifre a, b i c za koje je ispunjena jednakost $(2\overline{ab})^2 = \overline{abcab}$

VIII razred

1. Cijena olovke je cio broj centi. Ukupna cijena olovaka je veća od 11, a manja od 12 evra, dok je ukupna cijena 13 olovaka veća od 15, a manja od 16 evra. Kolika je cijena jedne olovke?

2. Naći vrijednost razlomka $\dfrac{a+b}{a-b}$, ako je $2a^2 + 2b^2 = 5ab, 0 \prec a \prec b$.

3. U koordinatnoj ravni data je prava $4x+3y=n$, gdje je n neki realan broj. Normalno odsojanje date prave od koordinatnog početka je 12. Odrediti broj n i površinu trougla koji data prava gradi sa koordinatnim osama.

4. Osnovice trapeza su AB=50cm i CD=30cm. Osnovica CD produžena preko tjemena C do tačke M. Koliko je rastojanje CM, ako se zna da duž AM dijeli trapez na dva po površini jednaka dijela?

5. Pravougli trougao čije su katete 6cm i 8cm je osnova trostrane piramide čije sve tri bočne strane sa osnovom zaklapaju ugao od 60 º . Izračunati površinu i zapreminu date piramide.

Savezno takmičenje 2004. godine

VI razred

1. Odredi sve trocifrene brojeve koji imaju tačno 5 djelilaca (uključujući jedinicu i sm broj).

2. U jednakokrakom trouglu ABC je ∠ABC=∠BCA=40 º. Simetrala gla BAC siječe krak BC u tački D. Dokazati da je AD+DC=AB.

3. Dat je kvadrat ABCD. Tačka E pripada stranici AD, tačka F pripada stranici DC, pri čemu je DE=DF. Ako je G podnožje normale iz D na EC, dokazati da je ∠BGF=90 º.

4. Dat je jednakostraničan trougao ABC, stranica AB=12cm. Neka je M tačka na stranici AC, tačka P podnožje normale iz M na AB, tačka Q podnožje normale iz P na BC i tačka R podnožje normale iz Q na AC. Izračunaj rastojanje AM, ako se Rpoklapa sa M.

5. Dato je pet prirodnih brojeva .Izračunati su svi zbirovi po dva od tih brojeva . Da li dobijeni zbirovi mogu biti 10 uzastopnih prirodnih brojeva?

VII razred

1. Dat trougao površine 2004. Neka su brojevi M i N redom tačke na stranicama AB i BC, takve da je AM:MB=1:3 i BN:NC=2:1. Ako se prave AN i CM sijeku u tački S, Izračunati površinu četvorougla MBNS.

2. Ako je $abc=1$, dokazati da je

$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})(c+\frac{1}{c})=(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2+(c+\frac{1}{c})^2-4.$$

3. Na putu je kolona autobusa. Autobus smatramo prepunim, ako je u njemu biše od 50 putnika. Kontrolori Vojo i Rade zaustavili su kolonu. Vojo je odredio procenat prepunih autobusa , a Rade procenat svih putnika u prepunim autobusima u odnosu na ukupan broj putnika. Čiji je procenat veći?

4. Dat je pravougaoni ABCD, kod koga je AB=2BC. Kružnice k sa centrom u A i poluprečnikom Ad siječe dijagonalu BD u tački M. Izračunati ugao BMC.

5. Pravougaonik 2 x 2005 podijeljen je na 4010 podudarnih kvadrata stranice 1. Na koliko se načina od njih mogu izabrati 2004 kvadrata, tako da među njima nema susjednih (dva kvadrata su susjedna ako imaju zajedničku stranicu).

VIII razred

1. Uravni su date 2004 tačke. Neki parovi tačaka su spojeeni dužima. Dokazati da postoje dvije tačke iz kojih polazi jednak broj duži.

2. Osnovna ivica pravilne trostrane prizme $ABCDA_1B_1C_1D_1$ je AB=a, a visina je $CC_1=a\sqrt{2}$. Neka je α ravan određena tačkama A,C_1 i središtem ivice BB_1, a β ravan određena tačkama C, B_1 i središtom ivice AB. Odrediti dužinu duži koja pripada presjeku ravni α i β i nalazi se unutar prizme.

3. Dokazati da je jednačina $x^2+y^3=z^2$ ima beskonačno mnogo rješenja u skupu prirodnih brojeva.

4. Naka je M tačka unutar kvadrata ABCD, takva da je $\angle$ MDC=$\angle$ MBD=20 º . Izračunati ugao MAB.

5. Dati su redom brojevi $a_1, a_2, a_3, \cdots a_{2004}$, takvi da važi $a_1 \cdot a_{2004} = a_2 \cdot a_{2003} = \cdots a_{1002} \cdot a_{1003} = 1$. Dokazati da je $\frac{1}{1+a_1^{2004}} + \frac{1}{1+a_2^{2004}} + \cdots + \frac{1}{1+a_{2004}^{2004}} = 1002$.

Regionalno takmičenje 2005. godine

VI razred

1. Brojilac i imenilac razlomka su cijeli brojevi čiji je zbir 1025. Poslije skraćivanja ovog razlomka dobijen je razlomak $-\frac{4}{9}$. Odrediti prvobitni razlomak.

2. Koliko je x, ako je poznato da je apsolutna vrijednost izraza $x-2$ pomnožena brojem koji je 4 puta manji od broja -8 jednaka -64?

3. U trouglu ABC simetrala ugla a sa stranicom BC zaklapa ugao od 120º , a simetrala ugla β se poklapa sa visinom koja odgovara stranici AC. Odrediti ugao kod tjemena C trougla ABC.

4. Obim paralelograma je 36 cm a jedna njegova stranica je 2 puta duža od druge stranice. Odrediti dužine odsječaka AE i EB gdje je E tačka presjeka stranice AB i simetrale tupog ugla D paralelograma ABCD.

5. Cipele koštaju 48 €. Poslije sniženja broj kupaca se povećao za 50% a prihod se uvećao za 25%. Kolika je nova cijena cipela?

VII razred

1. Napisati u obliku razlomka $\frac{a}{b}$ sljedeće decimalne beskonačne zapise brojeva: a) $0{,}222\ldots$; b) 4,50909....

2. Trgovac je za svoju radnju kupio tri paketa jabuka. Njihova ukupna težina je $136\,kg$. U jednom paketu je dva puta više jabuka nego u drugom, a u drugom $8kg$ jabuka više nego u trećem. Cijena jabuka iz prvog paketa je 30 centi, a iz trećeg 50 centi. Kolika je cijena jabuka iz drugog paketa, ako ih je trgovac prodao kao mješavinu jabuka iz sva tri paketa po cijeni od 40 centi za kilogram i ostvario dobit od $8{,}8\%$ više nego da su jabuke prodavane odvojeno?

3. Da li je moguće od bilo kojih 2005 prirodnih brojeva izabrati 25 tako da razlika između svaka dva od njih bude djeljiva sa 83? Dokazati.

4. Konstruiši osmougao i izračunaj njegovu površinu, ako je njegova stranica $a = 3cm$.

5. Ako je tačka H ortocentar ΔABC, dokaži da važi relacija: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(AH \cdot h_a + BH \cdot h_b + CH \cdot h_c)$ (a, b, c, h_a, h_b, h_c su stranice i odgovarajuće visine ΔABC).

VIII razred

1. Naći brojeve x i y ,koji su rješenja jednačine $9x^2+16y^2+6x-24y+10 = 0$.

2. Neki posao radi ekipa od 9 radnika i po planu treba da ga završi za 46 dana. Poslije 6 dana preduzeće odluči da ubrza izvršenje posla. Stoga, počev od sedmog dana, na posao dođe još šest radnika. Za koliko dana je urađen cio posao?

3. Darko stoji 4m udaljen od ulične svjetiljke. Na kraju Darkove sjenke, koju daje svjetiljka, stoji jednako visok njegov brat Dejan. Dejanova sjenka je dva puta duža od Darkove. Izračunati dužinu Darkove i Dejanove sjenke.

4. Dvije kružnice čiji se poluprečnici odnose kao 1:3 dodiruju se spolja.Izrazi površinu lika kojeg zatvaraju zajednička tangenta i kružnice pomoću poluprečnika manje kružnice.

5. Pravilna četvorostrana piramida i kocka imaju zajedničku bazu i nalaze se sa iste strane ravni u kojoj leže baze. Dijagonala kocke ima dužinu D=10$\sqrt{3}$ cm, a visina bočne strane piramide je 13cm. Izračunati zapreminu zajedničkog dijela ova dva tijela.

Republičko takmičenje 2005. godine

VI razred

1. Poslodavac je nagradio radnika sa 10% zarade. P0što je vratio dug od 60€, preostalu zaradu radnik je podijelio na tri jednaka dijela od po 90€. Kolika je zarada radnika bez zarade.

2. Odredi cijele brojeve x i y tako da su m,n i p prirodni brojevi, gdje je $m=\frac{2x+y}{x-3}$, $n=\frac{x-3}{2}$, $p=\frac{2}{2x+y}$

3. Na šahovskom turniru odigrano je 55 partija. Koliko je šahista učestvovalo na turniru ako je svaki igrač igrao partiju sa svakim učesnikom turnira?

4. Na kraju BC jednakokrakog ΔABC uočena je proizvoljna tačka M. Na produžetku Kraka AC, iza tačke A u odnosu na C, izabrana je tačka N tako da je AN=BM. Dokazati da osnovica AB polovi duž MN.

5. U proizvoljnom četvorouglu ABCD, tačke M i N su sredine stranica BC i AD. Dokazati da duž MN nije veća od poluzbira stranica AB i CD.

VII razred

1. Za koje vrijednosti x, y i z izraz $I=1992-52x^2-9y^2+18y-z^2-4z$ ima najveću vrijednost i koliko ona iznosi?

2. Ako je p prost broj i $p\geq 5$, dokazati da je broj p^2-1 djeljiv sa 24.

3. Dat je trougao ABC čija je površina $10cm^2$. Na produžetku stranice AB, preko tačke B odredimo tačku A_1, tako da je $AB=BA_1$, na produžetku stranice BC, preko tačke C odredimo tačku B_1, tako da je $BC=CB_1$ i na produžetku stranice CA, preko tačke A odredimo tačku C_1, tako da je $CA_1=AC_1$. Spajanjem tačaka A_1, B_1 i C_1 dobija se trougao $A_1B_1C_1$. Izračunati površinu trougla $A_1B_1C_1$.

4. U pravouglom trapezu $ABCD$ (pravi ugao je kod tjemena A) sa osnovicama AB i CD upisana je kružnica sa centrom u tački O. Izračunaj površinu trapeza, ako je $OC=2cm$ i $OB=4cm.$

5. Na pravoj p dato je 8 tačaka, a na pravoj q, koja je paralelna pravoj p dato je 7 tačaka. Koliko ima: a) trouglova; b) četvorouglova, čija su tjemena neka od tih tačaka?

VIII razred

1. Veza između promjenljivih x i y data je jednačinom : $\dfrac{7y-3x}{2}=2-\dfrac{5}{6}x$.

   Odrediti sve cijele vrijednosti promjenljive x za koje je 1< y <2.

2. Naći jednačine dveju pravih koje prolaze kroz tačku T(3,4), ako jedna od njih sadrži koordinantni početak a sa osom x prave trougao površine P = 14.

3. U trouglu ABC konstruisana je duž AM, gdje je M presječna tačka stranice BC i simetrale unutrašnjeg ugla kod tjemena A. Ako je centar kružnice upisane u trougao AMB ujedno i centar kružnice opisane oko trougla ABC, naći uglove trougla ABC.

4. Dat je trapez ABCD s paralelnim stranicama AB i CD. Izračunati obim tog trapeza ako je poznato da je dijagonala BD normalna na stranicu AB, da dijagonala AC polovi ugao DAB, te da se dijagonale sijeku u tački S tako da je d(B,S)=1cm, d(S,D)=2cm.

5. Izračunati zapreminu trostrane piramide u kojoj su dvije suprotne ivice 4cm i 12 cm a sve ostale po 7cm.

Savezno takmičenje 2005. godine

VI razred

1. Odredi sve proste brojeve p i q za koje važi jednakost $249\cdot p^3+q=2005$.

2. U trouglu ABC simetrale suoljašnih uglova kod tjemena A i B sijeku prave BC i CA redom u tačkama D i E, tako da je AD=BE=AB. Izračunati uglove trouglaABC, ako je: a) $\alpha \prec$ 90 º; b) $\alpha \succ$ 90 º.

3. Anka, Branka i Vesna su kupile po jedan primjerak iste knjige i pri tome potrošile redom 100%, $55\dfrac{5}{9}\%$, i 50% novca koji je svaka od njih imala kod sebe. Onda su riješile da ukupan ostatak novca međusobno podijele na jednake djelove. Branke je dala Anki 100 dinara. Koliko novca jeVesna dala Anki?

4. Dat je jednakokraki trougao ABC, kod koga je AC=BC. Simetrala $\angle$ABC siječe krak AC u tački D. Prava p sadrži tačku D, normalna je na AD i siječe pravu AB u E. Dokazati da je BE=2AD.

5. Na kružnici su redom date tačke $A_1, A_2,...A_{108}$. Svakoj tački je dodijeljen jedan prirodan broj tako da važe sledeći uslovi:

   a) Tačkama A_1, A_{19} I A_{50} SU REDOM DODIJELJENI BROJEVI 1, 19 I 50;

b) Zbir brojeva koji su dodijeljeni bilo kom nizu od 20 uzastopnih tačaka je 100. Odredi koji je broj dodijeljen tački A_{100} .

VII razred

1. U oštroglom trouglu ABC visine BE i AG sijeku se tački D. Tačke M, N, P, i Q su redom središta duži AD, BD, BC i AC. Dokazati da je četvorougao MNPQ pravougaonik.
2. Dokazati da je broj

   $$2002\cdot 2003\cdot 2004\cdot 2006\cdot 2007\cdot 2008+36$$

   Kvadrat nekog prirodnog broja.
3. Ako su m i n prirodni brojevi i ako je broj $m\ n$+1 djeliv sa 24, onda je broj $m+n$ djeljv sa 24. Dokazati.
4. Šestorka cifara $abcdef$ predstavlja vrijeme na digitalnom časovniku. Pri tome cifre ab određuju broj sati od 00 do 23, cifra cd određuje broj minuta od 00 do 59 i cifre ef određuju broj sekundi od 00 do 59. Koliko ima ovakvih šestorki za koje i šestorka cifara $fedcba$ predstavlja vrijeme koje se može pročitati na digitalnom časovniku?
5. Neka je ABC jednakokraki trougao kod koga je AC=BC i ugao pri vrhu C jednak je 20°. Ako je M tačka na kraku BC i CM =AB, odrediti veličinu $\angle$ AMB.

VIII razred

1. Odrediti najmanji broj oblika 101010...10101 koji je djeljiv sa 9999.
2. Osnovna ivica pravilne trostrane piramide je 3dm. Piramida je presječena sa ravni koja sadrži jednu osnovnu ivicu i normalna je na naspravnu bočnu ivicu i pri tome je dijeli u odnosu 9:8, računajući od tjemena osnove. Izračunati površinu piramide.
3. Ako su a, b i c dužine stranica trougla , onda je

   $$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right| \prec 1.$$

   Dokazati.
4. Dat je pravilan sedmougao ABCDEFG stranice 1. Dokazati da je $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=1.$
5. Na kružnici je dato 2005 plavih i 2005 crvenih tačka koje dijele kružnicu na 4010 podudarnih lukova . Svaka crvena tačka je središte nekog luka sa plavim krajevima. Dokazati da je svaka plava tačka središte nekog luka sa crvenim krajevima.

Regionalno takmičenje 2006. godine

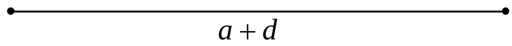
VI razred

1. Odrediti sve cijele vrijednosti promjenljive x za koje je

$$-\frac{2}{3} \prec \frac{x-1}{12} \leq \frac{1}{4}$$

2. Cijena patika je najprije povećana za 10%, a zatim je nova cijena snižena za 10%. Koliko su koštale patike, ako je razloka između poslednje dvije cijene 5,5€?

3. Konstruisati kvadrat ako je zbir njegove stranice a i dijagonale d duž prikazana na slici.



4. Stranica AB paralelograma ABCD je dva puta duža od stranice BC, a M je sredina stranice AB. Pokazati da su duži CM i DM uzajamno normalne.

5. Na školskom takmičenju učestvovalo je 25 učenika.Otog broja 21 učenik je riješio prvi zadatak, 20učenika drugi, 19 učenika treći i 18 učenika četvrti zadatak. Da li se može zaključiti da su 3 učenika riješila sva četiri zadatka? Obrazloži odgovor.

VII razred

1. Odrei broj $\frac{p}{q}$, $p, q \in$ N sa najmanje mogućim imeniocem, koji je veći od $\frac{1}{2006}$, a manji od $\frac{1}{2005}$.

2. Dokazati da je broj $12^{42} + 9^{42}$ djeljiv sa 15.

3. Konstruisati pravilan šestougao čija je površina jednaka zbiru površina tri data pravilna šetougla sa stranicama a_1, a_2 i a_3.

4. U ravni paralelograma ABCD, a nad njegovim stranicama sa spoljne strane konstruisani su kvadrati. Dokazati da je četvorougao čija su tjemena centri ovih kvadrata, takođe kvadrati.

5. Od sedam raznobojnih cvjetova treba napraviti buket u kojmu se nalaze tri cvijeta. Na koliko se načina to može uraditi?

VIII razred

1. Za realne brojeve a, b i c važi $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$. Dokazati da je $a = b = c$.

2. U skupu prirodnih brojeva riješiti jednačinu
$$\frac{2x-5}{3} + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \frac{2}{3} + \frac{x-2}{6} + \frac{x-4}{2}.$$

3. U Sali se nalaze stolice sa 3 i 4 noge. Kada na svaku stolicu sjedne samo po jedan učenik, u sali je ukupno 77 nogu. Koliko u sali ima stolica sa 3 noge, a koliko sa 4 noge?

4. U jednakostraničnom trouglu stranice a upisana je kružnica k_1. Jedno tjeme trougla je centar kružnice k_2 poluprečnika $\frac{a}{2}$. Izračunati površinu lika između k_1 i k_2.

5. Izračunati zapreminu pravilne šestostrane prizme , ako je manja dijagonala prizme $8\sqrt{6}$ cm i sa osnovom zaklapa ugao od 45°.

Republičko takmičenje 2007. godine

VII razred

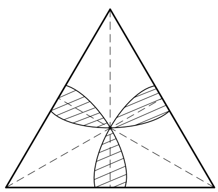
1. Brat i sestra mjerili su koracima dužinu i širinu vrta pravougaonog oblika. Kad je brat išao po dužoj stranici, a sestra po kraćoj stranici, zajedno su napravili 270 koraka. No, kada je brat išao po kraćoj, a sestra po dužoj stranici pravougaonika, zajedno su napravili 290 koraka. Dužina koraka brata je 0,8 m, a dužina koraka sestre je 0,6 m. Kolika je površina vrta?

2. Ukupna masa posude napunjene vodom (posude zajedno sa vodom) iznosi 2000 grama. Odlijemo li 20% vode, ukupna masa će se smanjiti na 88% prvobitne mase. Odredi masu prazne posude i masu vode.

3. Rastaviti polinom $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) - 1$ na činioce, pa zatim dokaži da je vrijednost polinoma negativna za svako $x < 0$, $x \neq -1$ i pozitivna za svako $x > 0$

4. U pravouglom trouglu ABC hipotenuza c=20cm, poluprečnik kružnice upisane u trougao je r i poluprečnik kružnice opisane oko trougla je R. Ako je $r : R$ =2 : 5, odrediti obim i površinu tog trougla.

5. Oko tjemena jednakostraničnog trougla stranice a opisani su (do presjeka sa stranicama) lukovi kružnice kojima pripada težište trougla. Na taj način dobija se figura u obliku trolisne ruže. Izračunati njenu površinu i obim.



Opštinsko takmičenje 2004. godine

III razred

1. Obim spoljašnjeg ruba pravouglog okvira ogledala je 120cm. Koliki je obim unutrašnjeg ruba tog okvira ako je okvir širok 5cm.
2. Tri cigle i teg od 6kg imaju masu kao 4 cigle i teg od 2kg. Koliko kilograma ima jedna cigla?
3. Majka ima 35 godina, a kćerka 9 godina. Za koliko godina će majka biti 3 puta starija od kćerke?
4. Zbir dva broja je 756. Ako prvome oduzmemo 84, a drugome dodamo 62 onda se dobiju jednaki brojevi. O kojim je brojevima riječ?
5. Na takmičenju iz matematike učestvovalo je 240 učenika prvog, drugog i trećeg razreda. Učenika trećeg razreda bilo je $\frac{1}{2}$ ukupnog broja učenika, učenika drugog razreda $\frac{1}{3}$ od broja učenika trećeg razreda, a ostalo su učenici prvog razreda. Koliko je na tom takmičenju učestvovalo učenika prvog, koliko drugog, a koliko trećeg razreda?

Opštinsko takmičenje 2005. godine

III razred

1. Pomoću četiri devetke, znakova računskih operacija i zagrada, napisati četiri različita brojevna izraza od kojih svaki ima vrijednost 1.
2. Na dva tasa vage stoje 24 tega. Na jednom tasu vage su tegovi od po 5 kg, a na drugom od po 3 kg. Po koliko je tegova na svaku stranu ako je vaga u ravnoteži?
3. Jedan čovjek ima 38 godina i 4 sina. Najstarijem sinu je 8 godina, a razlika između sinova je po dvije godine. Kada će zbir godina sinova biti jednak broju godina oca?
4. Vrijednost izraza a-b+c je 986. Kolika će biti vrijednost izraza, ako se svaki od brojeva a, b, c umanji za 86?
5. Dvije njive, jedna oblika kvadrata i druga u obliku pravougaonika imaju jednake obime. Zbir tih obima je 320m, pri čemu je širina pravougaonika njive dva puta manja od dužine njive u obliku kvadrata. Odrediti dimenzije kvadrata i pravougaonika.

IV razred

1. Koliko ima trocifrenih brojeva koji imaju istu vrijednost da se čitaju s lijeva u desno, bilo s desna u lijevo?
2. Ako je a+b=1800 izračunati 3805-a-b.
3. Tri dječaka imala su zajedno 310 € i odluče da kupe biciklo. Prvi za biciklo da 64€, drugi 56€, a treći 40€.Koliko je svako od njih imao novca, ako je poslije kupovine bicikla svima ostala ista suma novca?
4. Data su dva jednaka kvadrata koji imaju površinu po $100cm^2$. Ako se stranica jednog kvadrata poveća za 2 cm, a obim drugog za 16 cm, koji će kvadrat poslije ovih izmjena imati veću površinu?
5. Zbir ivica kocke je 1224 cm. Kolika je površina, a kolika zapremina te kocke?

Opštinsko takmičenje 2006. godine

IV razred

1. Za koplje, štit, mač i konja jedan vitez je platio 25 zlatnika. Štit, mač i konj koštaju 22 zlatnika, a koplje, štit i mač 15 zlatnika. Koliko pojedinačno koštaju koplje, štit,i mač, ako koplje, štit i konj koštaju 17 zlatnika?
2. Izračunaj vrijednost izraza:

   (2006+2004+2002+···+6+4+2) – (2005+2003+2001+···+5+3+1)
3. Iduće godine Nada će imati dva puta više godina od Jagode. Koliko godina ima Jagoda, a koliko Nada, ako se zna da je Nada 7 godina starija od Jagode?
4. Darko iz prve klupe je primijetio: « Ako se broj jabuka u korpi sabere sa brojem učenika dobija se tačno 100». Potom je učitelj svakom učeniku podijelio po 2 jabuke, a pri tom je u korpi ostalo 19 jabuka. Koliko je učenika u tom odjeljenju i koliko je jabuka bilo u korpi?
5. Ako se stranica kvadrata poveća za 2 cm, onda se dobije novi kvadrat čija je površina za $144cm^2$ veća od površine prvobitnog. Izračunati obim i površinu prvobitnog kvadrata.

Opštinsko takmičenje 2007. godine

III razred

1. Za numeraciju jedne knjige upotrijebljeno je 129 cifara. Koliko stranica ima ta knjiga?
2. Vlado, Jasna i Mirjana su prije 5 godine imali zajedno 20 godina. Koliko godina će imati za 8 godina?
3. Matija je polovinu svoga džeparca dao starijoj sestri Sari, a četvrtinu džeparca mlađoj sestri Jagodi, tako da je njemu ostalo svega 25 eura. Koliko je novca imao Matija na početku?
4. Andrija je izabrao jedan broj, pomnožio ga brojem 10, dobijenom proizvodu dodao 10, pa zbir podijelio sa 10, od rezultata oduzeo 10 i dobio 1. Koji je broj Andrija izabrao ?
5. Kvadrat je dvijema pravama podijeljen na dva kvadrata i dva pravougaonika. Koliki su obimi datog kvadrata i dobijenih pravougaonika, ako su obimi dobijenih kvadrata 16 cm i 36 cm ?

Rješenja

Regionalno takmičenje 2003. godine

VI razred

1. $b+c=\frac{5}{2}$; $(b+c)+(a+c)+(a+b)=2(a+b+c)=14$;

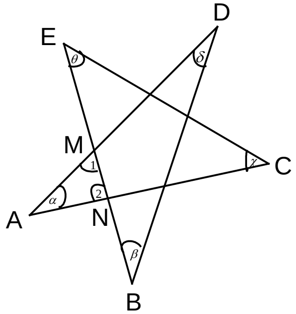
$a+c=\frac{59}{6}$; $a+b+c=7$;

$a+b=\frac{5}{3}$; $a=7-\frac{5}{2}$; $b=7-\frac{59}{6}$; $c=7-\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ $a=\frac{9}{2}$; $b=-\frac{17}{6}$ i $c=\frac{16}{3}$.

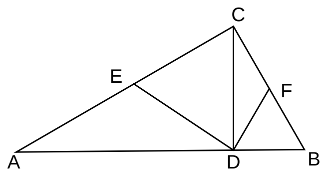
2. Označimo traženi broj sa x. Tada poslije dopisivanja broja 9 dobijamo broj 10x+9, pa broj (10x+9):3. Ako mu dopišemo broj 7 dobijamo broj 10((10x+9):3)+7 koji podijeljen sa 11 daje količnik 67, tj. (10((10x+9):3)+7):11=67. Otuda se dobija x=21.

3. Kako je $\frac{1}{3}$, odnosno $\frac{3}{9}$ druge sume novca jednake $\frac{4}{9}$ prve sume, to je prva suma jednaka $\frac{3}{4}$ druge, tj. $\frac{1}{4}$ druge sume novca je 12€, što znači da je drugi dječak imao 48€ a prvi 36€.

4. Iz ΔAMN slijedi: $\alpha+\angle 1+\angle 2=180°$;
aiz ΔMBD $\angle 1=\beta+\delta$ (spoljašni ugao trougla jednak je zbiru dva unutršnja nesusjedna ugla). Na istinačin iz ΔNCE je $\angle 2=\chi+\theta$, pa je
$\alpha+\beta+\chi+\delta+\theta=180°$.



5. Trouglovi ACD i BCD su pravougli.
Poznata nam je osobina da je hipotenuza dva puta duža od odgovarajuće težišne duži.
Zbog toga je DE=EC, pa je ΔCDE jednakokraki i $\angle EDC=\angle DCE$. Slično, trougao CDE je jednakokraki pa je i $\angle CDE=\angle DCF$. Dakle,
$\angle EDF=\angle EDC+\angle CDF=\angle DCE+\angle DCF=\angle EDF=90°$



VII razred

1. $$Q(2003)=\frac{2003^4-(2003+1)2003^3+(2003+1)2003^2-2003}{2003-1}=$$

$$=\frac{2003^4-2003^4-2003^3+2003^3+2003^2-2003}{2002}=$$

$$=\frac{2003(2003-1)}{2002}=2003.$$

2. $$\frac{1}{2}x+|\sqrt{7}-4|=\sqrt{5^2-10\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2}$$

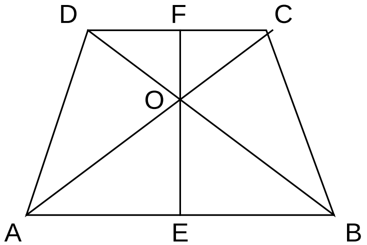
$$\frac{1}{2}x+4-\sqrt{7}=\sqrt{(5-\sqrt{7})^2}$$

$$\frac{1}{2}x+4-\sqrt{7}=|5-\sqrt{7}|$$

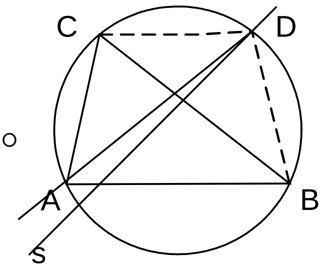
$$\frac{1}{2}x=5-\sqrt{7}-(4-\sqrt{7})$$

$$\frac{1}{2}x=5-\sqrt{7}-4+\sqrt{7}$$

$$x=2.$$



3. Iz podudarnosti ΔACD i ΔBCD slijedi $|AC|=|BD|$ i $\angle ACD=\angle BDC$. Kako je $\Delta OFD\cong\Delta OCF$ ($\angle ODF=\angle OCF$, $\angle OFD=\angle OFC=90°$, OF je zajednička stranica) zaključujemo da je $|OC|=|OD|$. Dakle, ΔCOD jejednakokrako-pravougli, pa je $\angle OCD=45°$. Jasno je da je i ΔOCF jejednakokrako-pravougli, pa je $|OF|=|CF|=4$cm. Slično se zaključuje da je $|OE|=|EB|=5$cm. Dakle, visina trapeza je $|EF|=9$cm, pa je $P=\frac{10+8}{2}\cdot 9=81cm^2$. Iz ΔOCF dobijamo da je OC$=4\sqrt{2}$, a iz ΔEBO da je $|OB|=5\sqrt{2}$. Konačno, iz ΔOBC $|BC|^2=32+50$, tj. $|BC|=\sqrt{82}$. Otuda je O=(10+2$\sqrt{82}$+8)cm=(18+2$\sqrt{82}$)cm.



4. Neka simetrala s stranice BC siječe kružnicu opisanu oko trougla ABC u tački D. Kako je $|CD|=|BD|$, to je $\angle BCD=\angle CBD$. Dokazaćemo da je prava određena tačkama A i D simetrala $\angle BAC$. Naime, $\angle CAD=\angle CBD$, kao periferijski uglovi nad tetivom CD. Isto tako,

$\angle$BAD=$\angle$BCD takođe kao periferijski uglovi ad tetivomBD. Otuda je $\angle$CAD=$\angle$BAD, tj. tačkama A i D je određena simetrala $\angle$BAC.

5. Označimo sa m ($m \in$N) broj odigranih partija. Saglasno uslovima zadatka dobijamo jednačinu 40% m =18, čije je rješenje 45. Dakle, ukupno je odigrano 45 partija. Neka je n ($n \in$N) označava broj učesnika turnira. Bilo koji od šahista odigrao je n-1 partiju (igrao je sa svakim od preostalih n-1 šahista). Ukupno je odigrano $\frac{n(n-1)}{2}$ partija. Prema uslovima zadatka dobijamo jednačinu $\frac{n(n-1)}{2}$=45, pa je $n(n-1)$=90. Kako je $n(n-1)$=10·9, zaključujemo da je n=10, tj. Da je na turniru učestvovalo 10 takmičara.

VIII razred

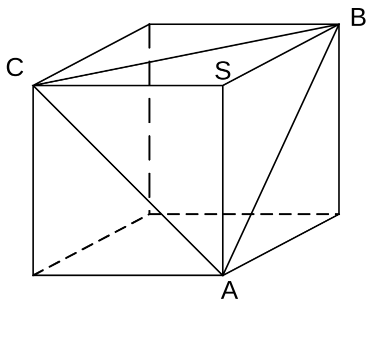
1. Neka je dat dvocifren broj $\overline{ab}$. Dopisivanjem jedinica dobijamo broj $\overline{1ab1}$. Iz uslova zadataka imamo $\overline{1ab1}=21\overline{ab}$, pa je 1001+10$\overline{ab}=21\overline{ab}$. Dalje je 11$\overline{ab}$=1001. Otuda slijedi da je $\overline{ab}$=91.

2. Poluprava As je simetrala ugla kod tjemena A trougla ABC. Kroz tačku C nacrtaj pravu CE$\parallel$As. Trougao ACE je jednakostraničan. Kako je ΔEBC~ΔABD, tada je AD:EC=AB:EB, AD:6=12:18, AD=4cm.

3. $$\frac{a}{3}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{6}=\frac{2a+3a^2+a^3}{6}=\frac{2a+2a^2+a^2+a^3}{6}=\frac{2a(1+a)+a^2(1+a)}{6}=$$
$$\frac{(1+a)(2a+a^2)}{6}=\frac{a(a+1)(a+2)}{6}.$$

Dobijeni brojilac predstavlja proizvod tri uzastopna prirodna broja, od kojih je jedan uvijek djeljiv sa 2 a jedan sa 3. Otuda slijedi da je taj proizvod djeljiv sa 6. Znači, brojilac je sadržalac imenioca, pa dati razlomak ima cjelobrojnu vrijednost.

4. a) Površina piramide se sastoji od pravougla trougla čije katete imaju dužine a cm i jednakostraničnog trougla ABC, stranice $a\sqrt{2}$ cm. Otuda je



$$P=3\cdot\frac{a^2}{2}+\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3})cm^2$$

b) Za izračunavanje zapremine piramide za osnovicu uzmimo trougao ABS, a za visinu duž CS.

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a=\frac{1}{6}a^3,\quad V_2=a^3-\frac{1}{6}a^3=\frac{5}{6}a^3,$$

pa je $V_1:V_2=1:5$.

5. a) Jednačina prave p ima oblik funkcije $y = ax + b$. Prava p prolazi kroz tačku K(6,-2). Ako koordinate tačke K zamijenimo u jednačinu $y = ax + b$ dobijamo jednačinu $2 = 6a + b$. Slično, zamjenjujući kordinate tačke S(2,1) u jednačinu prave p dobija se jednačina $1 = 2a + b$. Dobijene jednačine čine sistem jednačina sa nepoznatim a i b. Rješavanjem ovog sistema dobija se $a = -\frac{3}{4}$ i $b = \frac{5}{2}$. Otuda slijedi da je jednačina prave $p:\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$.

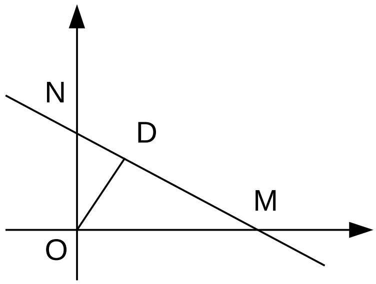
b) Trougao OMN je pravougli (vidi sliku). Dužina jedne katete je $|OM| = \frac{10}{3}$, a druge $|ON| = \frac{5}{2}$. Primjenom Pitacorine teoreme dobjiamo:

$$|MN|^2 = |OM|^2 + |ON|^2$$

$$|MN|^2 = \frac{100}{9} + \frac{25}{4}$$

$$|MN|^2 = \frac{625}{36}$$

$$|MN| = \frac{25}{6}.$$



c) Trougao OMN ima površinu

$$P = \frac{|OM\,|ON\,|}{2} = \frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{2}}{2} = \frac{25}{6}.$$ Takođe je

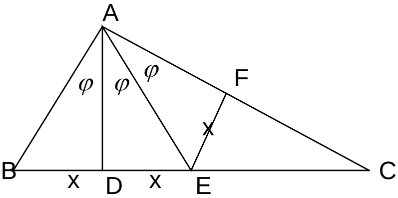
P=$\frac{1}{2}|\mathrm{OD}||\mathrm{MN}|$, odakle je $|\mathrm{OD}| = \frac{2P}{|\mathrm{MN}|} = \frac{2\frac{25}{6}}{\frac{25}{6}} = 2$.

Republičko takmičenje 2003. godine

VI razred

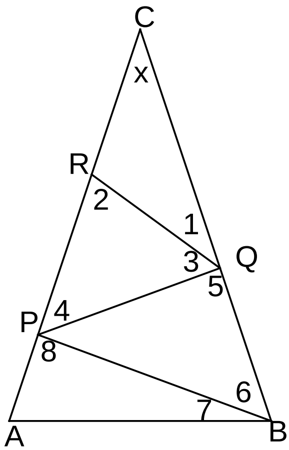
1. Kako je 0ºC=32 ºF, 100º vrijedi 180ºF. Otuda slijedi da jedan podeok Celzijusove skale odgovara 1,8 podeoka Ferhajtove skale. Neka je temparature x ºC jednako x ºF. Tada je x=32+1,8x ili0,8x=-32, tj. x=-40º.

2. Neka su D i E podnožja visine i težišne linije iz tjemene A i neka je EF normalno na AC (vidi sliku). Trouglovi ABD, ADE i AEF su podudarni, što treba dokazati.



Iz podudarnosti tih trouglova slijedi da je BD=DE=EF=x. Kako je E podnožje težišne duži, to je BE=EC=2x. Kako je ΔCEF pravougli trougao, a ce je dva puta veće od EF, slijedi da je $\angle$E=60º a $\angle$C=30 º, kako je $\angle$DAC=$\angle$FEC=60º (kao uglovi sa normalnim kracima), dobijamo da je 2φ=60º, φ=30 º. Otuda je $\angle$ A=3φ=90º i $\angle$B=60º.

3. Ako je CR=RQ=QR=PB=BA, tada je:



$\angle$1= x
$\angle$2=2 x
$\angle$4=2 x
$\angle$3=180 º -4 x
$\angle$5=$\angle$6
$\angle$5=180 º -($\angle$1+$\angle$3)
$\angle$5=180 º - x -180 º +4 x
$\angle$5=3 x
$\angle$6=3x
$\angle$7=$\angle$B-$\angle$6
$\angle$7=$\frac{180^\circ - x}{2}$-3 x
$\angle$7=$\frac{180^\circ - 7x}{2}$
$\angle$ A=$\frac{180^\circ - x}{2}$
$\angle$ A=$\angle$8
$\angle$ A+$\angle$8+$\angle$7=180 º
2$\angle$ A+$\angle$7=180 º
2$\angle$ A+$\frac{180^\circ - 7x}{2}$=180 º
2$\frac{180^\circ - x}{2}$+$\frac{180^\circ - 7x}{2}$=180 º
x=20 º

4. Proizvod dva dvocifrena broja veći je ili jednak $100\cdot100=10000$, a manji od $1000\cdot1000=1000000$. Otuda slijedi da je on ili petocifren ili šestocifren broj. Ako je taj proizvod petocifren broj, on je 33333, što slijedi iz uslova zadatka. Kako je $33333=3\cdot11111=3\cdot41\cdot271=123\cdot271$, to su u ovom slučaju traženi beojevi 123 i 271.
Ako je taj proizvod šestocifren broj, on je 333333, što slijedi iz uslova zadatka. Kako je $333333=3\cdot111111=3\cdot111\cdot1001=3\cdot3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37$, to su u ovom slučaju moguće sledeće tri kombinacije:
$(3\cdot3\cdot7\cdot11)\cdot(13\cdot37)=693\cdot481;$
$(3\cdot3\cdot7\cdot13)\cdot(11\cdot37)=693\cdot481;$
$(3\cdot7\cdot37)\cdot(3\cdot11\cdot13)=693\cdot481.$

5. Neka je traženi broj $x10y$. On je djeljiv sa 36 ako je djeljiv sa 4 i 9. Da bi bio djeljiv sa 4 mora y biti jedan od cifara 0 ili 4 ili 8. Da bi bio djeljiv sa 9 mora zbir cifara $x+y+1$ biti djeljiv sa 9. Otuda slijedi, koko y može biti jedna cifara 0 ili 4 ili 8, da $x+1, x+5, x+9$ mora biti djeljivo sa 9. To je moguće ako je:
$x+1=9, x=8$;
$x+5=9, x=4$;
$x+9=9, x=0$;
$x+9=18, x=9$.
Znači, traženi brojevi su 8100, 4104 i 9108.

VII razred

1. Datu nejednačinu zamijenimo nizom ekvivalentnih nejednačina

$$x^4-9\geq(9-1)\cdot(9+9^2+9^3+\cdots+9^{2001}+9^{2002}+9^{2004});$$

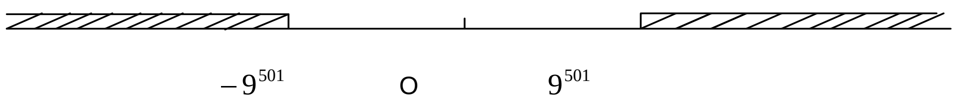
$$x^4-9\geq9^2+9^3+\cdots+9^{2002}+9^{2003}+9^{2004}-9-9^2-9^3-\cdots-9^{2001}-9^{2002}-9^{2003};$$

$$(x^2)^2-(9^{1002})^2\geq0$$

$$(x^2-9^{1002})(x^2+9^{1002})\geq0$$

$$(x-9^{501})(x+9^{501})\geq0$$

Rješenja poslednje jednačine prikazana su na slici:



Najmanje cjelobrojno pozitivno rješenje zadane nejednačine je 9^{501}. Kako se stepen broja 9 završava cifrom 1, ukoliko je broj devetki paran, odnosno cifrom 9 ako je broj devetki neparan. Zaključujemo da se 9^{501} završava cifrom 9.

2. Neparni brojevi pri dijeljenju sa 4 daju ostatk 1 ili 3. Tada iz uslova zadatka slijedi da bar dva od brojev a,b ili c pri dijeljenju sa 4 daju jednake ostatke.

Otuda slijedi da su posmatrani brojevi oblika $4k+1$ ili $4m+3$, kdje su k i m cijeli brojevi.

Naka , naprimjer, brojevi a i b pri dijeljenju sa 4 daju ostatak 1. Tada je $a = 4k+1$ i $b = 4m+1$. Otuda je $a \cdot b - 1 = (4k+1)\cdot(4m+1) - 1 = 4(4km + k + m)$.

Otuda slijedi da je $a \cdot b - 1$ djeljvo sa 4.

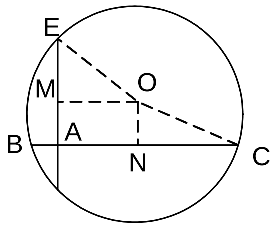
Ako, naprimjer b i c pri dijeljenju sa 4 imaju ostatak 3, tada je $b = 4k+3$ i $c = 4m+3$. Sada je lako vidjeti da je $bc - 1 = 4(4m + 4m + 4k + 2)$, pa je $bc - 1$ djeljivo sa 4.

Time ja pokazano da je bar jedan od brojeva $a \cdot b - 1$, $bc - 1$, $ca - 1$ djeljiv sa 4.

3. Iz trougla MOE slijedi:

$$r^2 = EM^2 + OM^2,\ r^2 = (\frac{1}{2}ED)^2 + (\frac{1}{2}BC - AB)^2,$$

$$r^2 = \frac{1}{4}(AD + AE)^2 + (\frac{1}{2}(AB + AC) - AB)^2, \text{ pa je}$$



(*) $\quad 4r^2 = (AD + AE)^2 + (AC - AB)^2$.

Iz trougla ONC slijedi:

$$r^2 = ON^2 + NC^2;\ r^2(\frac{1}{2}ED - AD)^2 + (\frac{1}{2}BC)^2;$$

$$r^2 = (\frac{1}{2}(AD + AE) - AD)^2 + \frac{1}{4}(AB + AC)^2, \text{ pa je}$$

(**) $\quad 4r^2 = (AE - AD)^2 + (AB + AC)^2$.

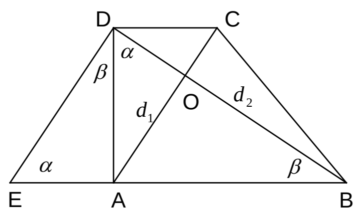
Sabiranjem (*) i (**) dobijamo

$$8r^2 = (AD + AE)^2 + (AC - AB)^2 + (AE - AD)^2 + (AB + AC)^2$$

Sređivanjem poslednje jednakosti dobijamo traženu jednakost.

4. Neka je ED‖AC. <u>Prvo rješenje.</u> Kako je $\Delta ADE \sim \Delta ADB$ (uglovi α i β su jednaki kao uglovi sa normalnim kracima), to je AD:AB=EA:AD, pa je $AD^2 = 4 \cdot 9$, tj. AD=6cm. Otuda je $P = \frac{4+9}{2} \cdot 6$

P=39cm ^{2}



5. Sto različitih tačaka, pod uslovom da bilo koje tri od njih ne mogu biti kolinearne, određuje $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$ pravih.

Šest tačaka A, B, C, D, E i F određuju $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ pravih, pod uslovom da bilo koje tri od njih ne mogu biti kolinearne. Ako te tačke pripadaju grupi od 100 datih tačaka i ako predstavljaju šestorku kolinearnih tačaka, one neće određivati 15 pravih, nego jednu pravu. Kako takvih šestorki ima 10, broj pravih koje određuje 100 tačaka iz zadatka jednak je 4950-$10 \cdot 14$=4810.

VIII razred

1. Kako je $(x-y)^2 \geq 0$, to je $x^2+y^2 \geq x^2+y^2+2xy-x^2-y^2$, pa je $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$. Uzimajući da je $x=a+\frac{1}{a}$ i $y=b+\frac{1}{b}$ dobijamo

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{1}{2}(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b})^2=\frac{1}{2}(a+b+\frac{a+b}{ab})^2=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{ab})^2 \geq \frac{1}{2}(1+4)^2=\frac{25}{2}$$

.

U dkazu su korišteni uslovi iz zadatkada su a i b pozitivni brojevi i da je $a+b=1$. Otuda je $0 \prec a \prec 1$ i $0 \prec b \prec 1$. Korišćen je i odnos između gemetrijske i aritmetičke sredine $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$.

2. Neka je x traženi broj. Tada se iz uslova zadatka dobija

(*) $x=151m+40=152n+27$,

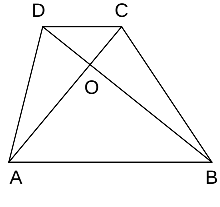
gdje su m i n prirodni brojevi. Pošto je x četvorocifren broj očigledno je $n=\frac{x-27}{152} \prec \frac{10000-27}{152} \leq 65$. Iz (*) dobijamo $15(m-n)=n-13$. Ako bi $m-n \neq 0$, tada bi apsolutna vrijednost broja $n-13$ bila veća od 150. To je nemoguće jer je $n \leq 65$. Otuda slijedi da je $n-13=0$. Otuda je $n=m=13$. Znači $x=151 \cdot 13+40=152 \cdot 13+27=2003$.

3. Kako se bazen za10 minuta napuni toplom vodom do visine 1m, slijedi da se bazen svakog minuta puni toplom vodom 0,1m. Otuda slijedi da će se toplom vodom do visine 0,75m napuniti za 7,5 minuta.

Kako se bazen za 10 minuta napuni hladnom vodom do visine od 0,5m, slijedi da se bazen svakog minuta puni hladnom vodom0,05m.

Iz uslova da je punjen bazen do visine 1,25m obavljeno tako što se do visine 0,75m bazen ponio samo toplom vodom, a nakon toga je punjenje obavljeno toplom i hladnom vodom, slijedi da je $0{,}75+x \cdot (0{,}05+0{,}1)=1{,}25$, gdje je x vrijeme za koje je punjenje bazena obavljeno toplom i hladnom vodom. Rješavajući jednačinu po x dobijamo $x=10:3$, pa je $x=3\frac{1}{3}$ minuta. Znači bazen se do visine od 1,25m napuni za $(7\frac{1}{2}+3\frac{1}{3})$ minuta tj. Za 10 minuta i 50 sekundi.

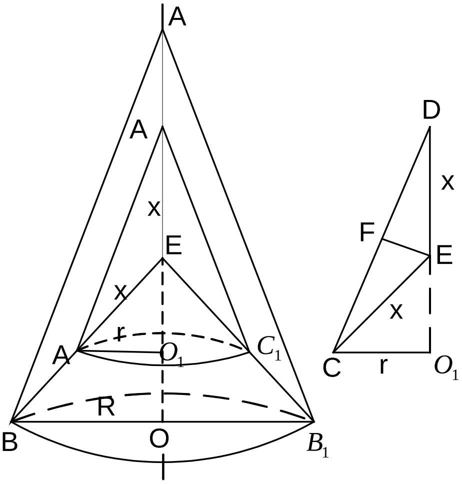
4. Trouglovi ABO i COD su slični sa koeficijentom sličnosti 3 (AB:CD=BO:OD=AO:OC=1:3). Otuda slijedi da je $P_{\Delta AOD}=P_{\Delta BOC}=3 \cdot P_{\Delta OCD}$ i $P_{\Delta AOB}=9 \cdot P_{\Delta OCD}$. Tada je $P_{trapeza}=16 \cdot P_{\Delta OCD}$.



5. Sa slike se uočava da se površina rotacionog tijela može izrčunati po formuli $P_T = M_1 + M_2 + M_3 - M_4$ površine omotača koji nastaju rotacijom truglova ΔABB$_1$, ΔDCC$_1$, ΔEBB$_1$, i ΔECC$_1$.

Kako je ΔABE ~ ΔDCE, slijedi da je $20\sqrt{3} : 6\sqrt{3} = (14 + x) : x$, pa je $x = 6$. Kako je , dalje, DF=$\frac{1}{2}$ CD=$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3}$, tada se iz pravouglog trougla ΔDEF dobija FE^2= $x^2 - DF^2 = 9$, pa je FE=3.

IZ ΔCDO$_1$ ~ ΔDFE, slijedi $CD : x = r : FE$, pa je $6\sqrt{3} : 6 = r : 3$, tj. $r = 3\sqrt{3}$. Na sličan način se dobija $R = 10\sqrt{3}$. Kako su izvodnice omotača M$_1$, M$_2$, M$_3$ i M$_4$ odgavarajuće stranice zadanog trapeza, tada se mogu izračunati njihov površine. Sprovodeći računanje tih površina dobija se $P_T = 2\pi(327 + 91\sqrt{3})cm^2$.



Postupajući na sličan način kao kod izračunavanja površine, zapreminu rotacionog tijela izračunavamo po formuli $V_T = V_1 - (V_2 + V_3) + V_4$, gdje su V_1, V_2, V_3 i V_4 zapremine kuoa koje nastaju rotacijom truglova ΔABB$_1$, ΔDCC$_1$, ΔEBB$_1$, i ΔECC$_1$. Pošto se mogu izračunati visine tih kupa, dobija se da je $V_T = 1946\pi cm^3$.

Sveznog takmičenje 2003. Godine

VI

1. Očigledno je da se brojevi $1^{2003}, 5^{2003}$ i 6^{2003} završavaju redo ciframa 1, 5, i 6. Neparan stepen broja 4 odnosno broja 9 uvijek se završava cifrom 4 odnosno 9. na kraju brojevi 2 i 3 stepenovani brojm oblika 4k+3 uvijek se završava cifrom 8 odnosno 7. Prema tome dati broj se završava cifrom 1+8+7+4+5+6+9=20. Otuda slijedi da je taj broj djeljiv sa 10.

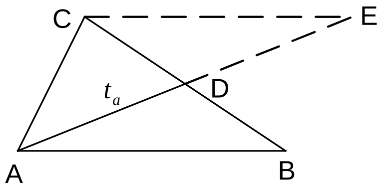
2. Neka su a, b i c stranice trougla ABC i t_a=AD težišna linija. Iz ΔABC je $t_a \succ c - \frac{a}{2}$, a iz ΔADC je $t_a \succ b - \frac{a}{2}$. Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo $2t_a \succ b + c - a$, tj.

(*) $t_a \succ \dfrac{b+c-a}{2}$.

Produžimo AD preko tačke E tako da je AD=ED. IZ ΔAEC je $2t_a \prec b+c,$ tj.

(**) $t_a \prec \dfrac{b+c}{2}$

Iz (*) i (**)sliedi



(1) $\dfrac{b+c-a}{2} \prec t_a \prec \dfrac{b+c}{2}$.

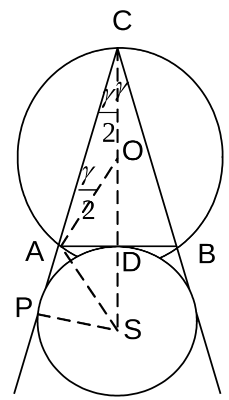
Analogno je

(2) $\dfrac{a+c-b}{2} \prec t_b \prec \dfrac{a+c}{2}$ i

(3) $\dfrac{a+b-c}{2} \prec t_c \prec \dfrac{a+b}{2}$.

Sabiranjem (1), (2) i (3) dobijamo

$\dfrac{a+b+c}{2} \prec t_a +_b +t_c \prec a+b+c$.



3. S obzirom da je ΔABC jednakokrak, tačke O i S pripadaju simetrali ula $\angle$ACB=γ. Dakle $\angle$ACO=$\dfrac{\gamma}{2}$, a kako O pripada simetrali duži AC to je $\angle$ACO=$\angle$CAO=$\dfrac{\gamma}{2}$. Iz ΔACD, gdje je D središte osnovice AB, slijedi $\angle$OAB=90° - $\dfrac{\gamma}{2}$ - $\dfrac{\gamma}{2}$ =90° - γ.

Naka je P dodirna tačka kružnice k(S,r) sa produžetkom kraka AC. Tada je $\angle$OAB=$\angle$BAS=$\angle$SAP i $\angle$CAO+$\angle$OAB+$\angle$BAS+$\angle$SAP=180° odakle je $\dfrac{\gamma}{2}+(90^\circ-\gamma)\cdot 3=180^\circ$, odnosno $\dfrac{5}{2}\gamma$ =90° i konačno γ =36°. Dakle, $\alpha=\beta=72^\circ$ i γ =36°.

4. Označimo sa 1 put koji pređe mala kazaljka prilikom njene rotacije za 360°, tj. za puni krug, a put koji je prešla mala kazaljka od podeoka 12h do traženog vremena označimo sa x. Tada put koji ćepreći mala kazaljka od traženog trenutka do podeoka 13h je $\dfrac{1}{13}-x$, a put koji će za to vrijeme preći velika kazaljka je 12 puta duži, tj. 1-12x. Sada je jasno da mora biti $1-12x=x$ odnosno $x=\dfrac{1}{13}$ punog kruga, odnosno $\dfrac{1}{13}$ od 12h pa je rezultatzadatka 12h i $\dfrac{12}{13}$h, tj. 12h 55min 23$\dfrac{1}{13}$s.

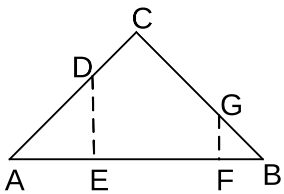
5. Neka je p broj parova dječak-djevojčica, koji sjede zajedno. Znači broj učenika u parovima je $2p$, jer je p broj dječaka u parovima, a p broj djevojčica u parovma. Neka su m i n ukupan broj dječaka, odnosno djevojčica. Tada je $p=\frac{2}{3}m$ i $p=\frac{3}{5}n$, odakle je $m=\frac{3}{2}p$ i $n=\frac{5}{3}p$. Ukupan broj učenika u odjeljenju je $m+n=\frac{19}{6}p$. Otuda je $\frac{2p}{\frac{19}{6}p}=\frac{12}{19}$. Dakle, $\frac{12}{19}$ od ukupnog broja učenika sjedi u mješovitim parovima.

VII razred

1. Neka je $a=\frac{m}{n}$, pri čemu su m i n uzajamno prosti brojevi. Pretpostavimo da je $a+\frac{1}{a}\in Z$, tj. $a+\frac{1}{a}=k,k\in N$. Tada je $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=k$, odakle je $m^2+n^2=kmn$. Desna strana predhodne jednakosti je djeljiva sa m, pa $m \mid n$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da su m i n uzajamno prosti brojevi.

2. Označimo sa P površinu ΔABC, sa P_1 površinu petougla ΔBFG, sa P_2 površinu petougla CDEFG i sa P_3 oovršinu ΔAED. Data je kateta jednakokrakog-pravouglog ΔABC: $a=1$. Tada je $P=\frac{a^2}{2}=\frac{1}{2}$. Iz uslova zadatka je $P=P_1+P_2+P_3=5P_3$. Trouglovi BGF i AED su jednakokrako-pravougli, pa je FG=FB i ED=EA, odakle je

(1) FG+FE+ED=$\sqrt{2}$.



Neka je BF=a_1 i BG=c_1. Tada je $P_1=\frac{a_1}{2}$, a kako je $P_1=\frac{2}{5}P$ to je $\frac{a_1^{\ 2}}{2}=\frac{2}{5}\frac{a^2}{2}$, odnosno $a_1^{\ 2}=\frac{2}{5}$, tj. $a_1=\frac{\sqrt{10}}{5}$ i $c_1=BG=a_1\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$. Sada je

(2) GC=BC-BG=1-$\frac{2\sqrt{5}}{5}$=$\frac{5-2\sqrt{5}}{5}$.

Slično, iz ΔAED je $P_3=\frac{a_2}{2}$ i $P_3=\frac{1}{5}P$ (pri čemu $a_2=ED$), pa je $a_2^{\ 2}=\frac{1}{5}$, odnosno $a_2=\frac{\sqrt{5}}{5}$, a $c_2=AD=a_2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, odakle je

(3) CD=AC-AD=1-$\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{5-\sqrt{10}}{5}$.

Konačno, sabiranjem (1), (2) i (3) dobijamo obim petougla CDEFG:

O=FG+FE+ED+GC+CG=$\sqrt{2}+\frac{5-2\sqrt{5}}{5}+\frac{5-\sqrt{10}}{5}=\frac{10+5\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10}}{5}$.

3. Iz jednakosti $m^2+n^2=2004(a+b)$ slijedi da je broj m^2+n^2 djeljiv sa 3, što je jedino moguće ako su m i n djeljivi sa 3. Međutim, tada su brojevi m^2 i n^2 djeljivi sa 9, pa iz predhodne jednakosti zaključujemo da je broj $a+b$ djeljiv sa 3. Kako je broj $a-b$ djeljiv sa 3, što slijedi iz jednakosti $m^2-n^2=2002(a-b)$, to su brojevi a i b djeljivi sa 3.

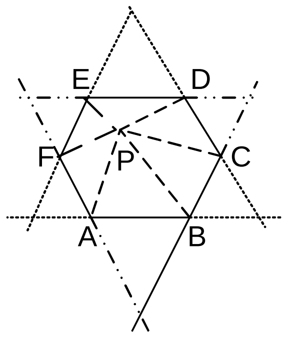
4. U početku igrač B briše brojeve djeljive sa 3 sve dok ih ima. Kad na tabli ostanu samo brojevi koji nijesu djeljivi sa 3 (što će se desiti najksnije poslije 333. poteza) igrača B, on nastavlja da briše brojeve proizvoljno. Kad na tabli ostane tri broja, na potezu je igrač B. Među ta tri broja postoje bar dva koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3. Ta dva broja će igrač B ostaviti, a izbrisaće onaj treći. Time postiže pobjedu.

5. Sa S_{XYZ} označimo površinu trouglova XYZ. Treba dokazati da je

$$S_{PAB}+S_{PCD}+S_{PEF}=S_{PBC}+S_{PDE}+S_{PFA}$$

Svaki od šest trouglova ima po jednu stranicu jednaku stranici šestougla. Označimo dužinu te stranice sa a.

Neka su h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 i h_6 redom visine iz tjemena P trouglova PAB, PBC, PCD, PDF, PEF i PFA. Tada je



$$S_{PAB}+S_{PCD}+S_{PEF}=\frac{ah_1}{2}+\frac{ah_3}{2}+\frac{ah_5}{2}=$$

$$\frac{a}{2}(h_1+h_3+h_5),$$

$$S_{PBC}+S_{PDE}+S_{PFA}=\frac{ah_2}{2}+\frac{ah_4}{2}+\frac{ah_6}{2}=$$

$$\frac{a}{2}(h_2+h_4+h_6).$$

Posmatrajmo trougao T_1 čija su tjemena presjeci pravih: AB∩CD i CD∩EF i EF∩AB i i trugao T_2 čija su tjemena u presjeku previh: BC∩DA i DE∩FA i FA∩BC. Trouglovi T_1 i T_2 su jednakostranični i podudarni. Neka je njihova visina h. Kako je $h_1+h_3+h_5=h$ i $h_2+h_4+h_6=h$, slijedi tvrđenje.

VIII razred

1. Brojevi a,b i c su dužine stranica nekog trougla ako i samo ako postoje realni brojevi $x,y,z \succ 0$ takvi da je $a=y+z, b=z+x, c=x+y$. Tada je

$$x=\frac{b+c-a}{2}\succ 0, y=\frac{c+a-b}{2}\succ 0, z=\frac{a+b-c}{2}\succ 0$$

Pa je data nejednakost ekvivalentna nejednakosti

$$2\cdot x\cdot 2\cdot y\cdot 2\cdot z\le (y+z)(y+x)(x+y),$$

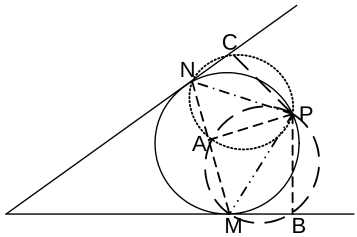
Koja je tačna jer je na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dva pozitivna broja

$$\frac{y+z}{2}\ge\sqrt{yz}, \frac{y+x}{2}\ge\sqrt{yz}, \frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy},$$

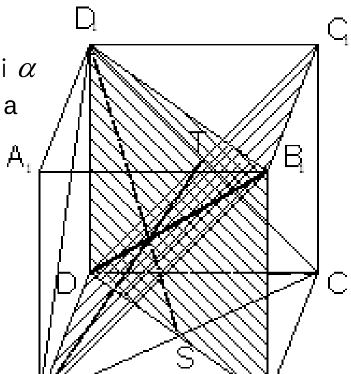
Odnosno

$$(y+z)(y+x)(x+y)\ge 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}\cdot 2\sqrt{xy}.$$

2. Neka tačke B i M pripadaju jednom, a tačke N i C drugom kraku datog ugla. Kako su uglovi MBP i MAP pravi, tačke B, P A i M pripadaju istoj kružnici, pa su uglovi ABP i PMA jednaki, kao periferijski uglovi nad istom tetivom AP. Slično, tačke P,C,N i A pripadaju istoj kružnici, a uglovi PAC i PNC su jednaki kao periferijskiuglovi nad istom tetivom PC. Međutim, ugao PMN je jednak uglu PNC(prvi je periferijski ugao nad tetivom PN upisane kružnice, a drugi je ugao između te tetive i tangenteNC), pa je $\angle$ABP=$\angle$CAP.



3. Kako je dijagonala kocke DB_1 presjek ravni γ i β između kojih se traži ugao, to treba uočiti neke ravni α koja je normalna na DB_1. Presjek te ravni sa ravnima γ i β ododrediće traženi ugao. Ravan α je određena tačkama A;C i D_1, jer je očigledno DB_1 normalno na α. Ako su S i T redom središta duži AC i CD_1, tada su AT o D_1S presjeci ravni α sa ravnima γ i β. Međutim, AT i D_1S su visine jednakostraničnog trougla ACD_1, pa je traženi ugao60°



4. IZ $x+7y=(x+y)+6y$ zaključujemo da je jedno od tvrđenja od tvrđenja (c) ili (d) lažno. Dakle, tvrđenje (a) i (b) su istinita. Iz (b) dobijano $x+y=3y+5$. Desna strana ove jerdnakosti nije djeliva sa 3, pa 3 nije djelilac od $x+y$, tj. tvrđenje (c) je lažno.

Iz (a) dobijamo $x+1=ky,(k \in N)$. Kada ovu jednakost uvrszimo u (b) dobijamo $ky=2y+6$, odakle je $y=\frac{6}{k-2}$.

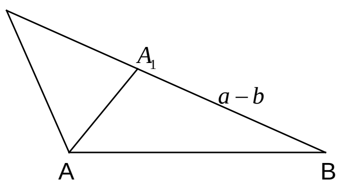
Budući da je $y \in N, k-2 \in \{1,2,3,6\}$, tada je $y \in \{6,3,2,1\}$. Iz $x=2y+5$ i $y \in \{6,3,2,1\}$ dobijamo $x \in \{17,11,9,7\}$. Dalje je $(x,y) \in \{(17,6),11,3),(9,2),7,1)$. Od navenih parova tvrđenje (d) zadovaljavaju (17,6) i (9,2).

5. Dužina trake može biti najviš 2003. Poijelimo pravougaonik na trake 1x2003. prvu ostavimo cijelu, drugo podijelimo dva dijela dužine 1 i 2002, treću na dva dijela dužine2 i 2001 i td. Tako možemo da idemo do 1002. trake, koju dijelimo djelove dužine 1001 i 1002. Dakle, pravouganik $1002 \cdot 2003$ možemo podijeliti na trake različitih dužina, pei čemu su zastupljene sve dužine od 1 do 2003. Očigledno je da se za $n \prec 1002$ pravougaonik može podijeliti na traženi način, izostavljanjem nekih trako.
$1+2+3+\cdots+2003=1002 \cdot 2003$ maksimalna površina pravougaonika koja se možepokriti trakama nejednake dužine ne može biti veća od $1002 \cdot 2003$. Kako je dužina pravougaonika jednaka 2003, maksimalna širina n ne može biti veća od 1002, jer bi neke trake bile upotrijebljene više puta. Odgovor: $n \leq 1002$.

Regionalno takmičenje 2004. godine

VI razred

1. Naka je ΔABC traženi, tada uočimo tačku A_1 na stranici BC, takva da je $AC = A_1C = b$ i ΔAA_1C jednakokraki, a $BA_1 = a-b = 3{,}5cm$. Prvo ćemo konstruisati ΔABA_1, jer su mu date stranica AB= 5cm, ugao $\beta = 30°$ i stranica $BA_1 = a-b = 3{,}5cm$ (na osnovu SUS). Tačku C nalazimo u presjeku simetrala duži AA_1 i produžetka stranice BA_1. Spajanjem tačke A,B i C dobijamo traženi ΔABC.



2. Neka je na početku sjelo n gledalaca, a zatim je između svaka dva od njih sjeo $n-1$ gledalac, što je ukupno $2n-1$ gledalaca. U drugom koraku biće $(2n-1)+(2n-2)=4n-3$ gledalaca, a u trećem (4n-3)+(4n-4)=8n-7 gledalaca, Konačno postavimo jednačinu $8n-7=113$, čijim rješavanjem dobijamo da je na početku u redu sjelo $n=15$ gledalaca.

3. Oslobodimo se prvo prve spoljašnje zagrade

$$1-2+(3-(4-\cdots-(1001-(1002-\frac{x}{2})))\cdots))=501$$

$1-2+3-(4-\cdots-(1001-(1002-\frac{x}{2})))\cdots)=501$ i tako redom.

Nastavljanjem ovog postuoka dobijamo

$1-2+3-4+\cdots+1001-1002-\frac{x}{2}=501$. Nađimo potom razlike

(1-2), (3-4), ..., (1001-100), pa dobijamo jednačinu

-501+$\frac{x}{2}=501$, odakle je $x=2004$.

4. Razlomak $\frac{a(c-b)}{b}$ je pozitivan ako je:

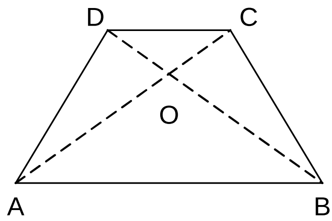
1) $a(c-b)\succ o$ i $b\succ 0$ ili 2) $a(c-b)\prec o$ i $b\prec 0$.

U slučaju 1) izraz $a(c-b)\succ o$, ako je ($a\succ 0$ i $c-b\succ 0$), pa bi tada bilo i $a\succ 0$ i $b\succ 0$, što ne ispunjava uslove zadatka, ili ($a\prec 0$ i $c-b\prec 0$ i $b\succ 0$), što ispunjava uslovzadatka $a\prec 0$ i $b\succ 0$ i $c=0$. Slično razmatramo slučaj 2) izraz $a(c-b)\prec 0$ i $b\prec 0$, ako je ($a\prec 0$ i $c-b\succ 0$ i $b\succ 0$), što ne ispunjava uslove zadatka, iili ($a\succ 0$ i $c-b\prec 0$ i $b\prec 0$), takođe ne ispunjava uslove zadatka. Dakle, konačno je $a\prec 0$ i $b\succ 0$ i $c=0$.

5. Kako je $O_{\Delta ABC}=O_{\Delta ABD}$ i $O_{\Delta ACD}=O_{\Delta BCD}$, to je

AC+BC=AD+BD (1) i
AC+AD=BC+BD (2)

Jednakost(2) napišimo u obliku AC-BC=BD-AD i dodajmo je jednakosti (1) odakle dobijamo 2AC=2BD, odnosno AC=BD, tada je i BC=AD, pa je na osnovu pravila podudarnosti (SSS) ΔABC=ΔABD. Iz podudarnosti trouglova slijedi da je $\angle$CAB=$\angle$ABD, odakle je ΔABO jednakokraki, pa je AO=BO=19cm.



VII razred

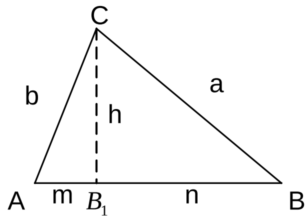
1. Poslije transformacije polinoma na lijevoj strani dobijamo:
$(x+1)^2+(2y-3)^2=0$. Kako je zbir kvadrata jednak nuli samo ako su oba sabirka jednaka nuli, zo imamo:

$x=-1$ i $y=\frac{3}{2}$. Tražena vrijednost polinoma je:

$R(-1,\frac{3}{2})=(-1)^{2003}+2004\cdot\frac{3}{2}$=-1+3006=3005.

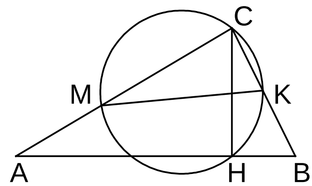
2. Neka je traženi broj $x = \overline{1abcde}$. Iz uslova zadataka imamo $\overline{abcde1} = 3 \cdot \overline{1abcde}$. Ako sa y označimo petocifreni broj $\overline{abcde}$, imamo: $\overline{y1} = 3 \cdot \overline{1y}$, pa je $10y + 1 = 3 \cdot (100000 + y)$, tj. $y = 42875$. Traženi broj je $x = \overline{1y} = 142875$.

3. Neka su dužine stranice ΔABC uzastopni prirodni brojevi, $a = x, b = x+1$ i $c = x+2$, $x \geq 3$. Tačkom B_1 (podnožije visine iz tačke B na stranicu AC) stranica AC podijeljena je na dv odsječka m i n. Iz pravouglog trougla BB_1C i BB_1A ,primjenom Pitagorine teoreme imamo:



$h^2 = a^2 - m^2, h^2 = c^2 - n^2$. Odatle izjednačavanjem desnih strana i odgovarajućim zamjenjivanjem dobijamo $4(x+1) = (n-m)(n+m)$. Kako je prema uslovu zadatka $b = n + m = x + 1$ to zamjenom u predhodnoj jednačini dobijamo da je $n - m = 4$, što je i trebalo dokazati.

4. Prema uslovima zadatka je CK=KB. Kako je ΔCHB pravougli, to je CK=KB=KH. Sa M označimo presječnu tačku kružnice i katete AC. Kako ie $\angle$ MCK=90º, to je MK prečnik kružnice. Kako su tetive KC i KH jednake, to je prečnik normalan na CH, što znači da je MK$\parallel$AB. Prema tome MK je srednja linija ΔABC, tj.



$MK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$. Traženi polupречnik je $r = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{4}c$.

5. U sudu A ima 17 litara tečnosti od čega $\frac{8}{17}$ vode i $\frac{9}{17}$ soka, a u sudu B ima 21 litar tečnosti od čega $\frac{9}{21}$ vode i $\frac{12}{21}$ soka. Kada se iz suda A izvadi 8 litara tečnosti izvadiće se $8 \cdot \frac{8}{17} l = \frac{64}{17} l$ vode i $8 \cdot \frac{9}{17} l = \frac{72}{17} l$ soka. U sud će ostati $(8 - \frac{64}{17}) l = \frac{72}{17} l$ vode i $(9 - \frac{72}{17}) l = \frac{81}{17} l$ soka. Slično iz suda B će se izvaditi $\frac{72}{21} l$ vode i $\frac{96}{21} l$ soka, a u sudu će ostati $\frac{117}{21} l$ vode i $\frac{156}{21} l$ soka. Poslije presipanja po 8 litara tečnosti, kako je rečeno, u sudu A će biti

$$(\frac{81}{17}+8\cdot\frac{\frac{156}{21}}{\frac{117}{21}+\frac{156}{21}})l=(\frac{81}{17}+\frac{96}{21})l=\frac{3333}{357}l$$ soka, au sudu B

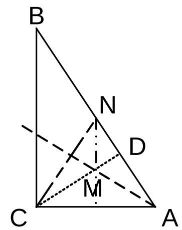
$$\frac{117}{21}+8\cdot\frac{\frac{72}{17}}{\frac{72}{17}+\frac{81}{17}})l=(\frac{117}{21}+\frac{64}{17})l=\frac{3333}{357}l\,.$$

VIII razred

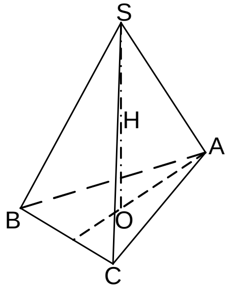
1. Ako je dužina je dužina štapa xcm, tada je od $\frac{3}{4}x$ odsječen komad dužine $\frac{2}{3}(\frac{3}{4}x)=\frac{1}{2}x$. Preostali dio štapa, a to je $\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}x$ ima dužinu 55cm. Cio štap bio je 4 puta duži, pa je njegova dužina bila 220cm.

2. Iz prvog uslova dobijamo $z=2x+2y$, a iz druge $z=3y-3x$. Pomnožimo prvu jednačinu sa3 i drugu sa -2. Sabiranjem tih jednačina dobijamo $z=12x$.Kako je x pozitivan broj zaključujemo da je veće od x.

3. Neka se razlomak $\frac{n+2}{n^2+4n+34}$ može skratiti sa d. Tada se i razlomak $\frac{n^2+4n+34}{n+2}$ može skratiti sa d. Kako je $\frac{n^2+4n+34}{n+2}=\frac{(n+2)^2+30}{n+2}=n+2+\frac{30}{n+2}$, to se i razlomak $\frac{30}{n+2}$ može skratiti sa d. Zato je d djelilac brojioca tog razlomka, tj. broja 30.



4. Po konstrukciji duž MN je srednja linija ΔBCA , pa je paralelna sa katetom BC. Samim tim je MN$\perp$AC. Dakle, u ΔANC visine CD i MN sijeku se u tački M, pa otuda slijedi da je M orticentar ovog trougla. Zbog toga je u ΔANC duž AM treća visina i prava AM je normalna na pravu CN.



5. Rješenje date jednačine je $x=m$. Bočne strane su jednakokraki pravougli trouglovi. Hipotenuze ovih trouglova su osnovne ivice piramide $a=x\sqrt{2}=m\sqrt{2}$. Visina H piramide izračunaćemo iz pravouglog trougla ΔSOA $H^2=x^2-(\frac{2}{3}h)^2$, gdje je h visina baze. Kako je

$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{m\sqrt{3}}{2}$, otuda je H=$\frac{m\sqrt{3}}{3}$. Zapremina piramide je

$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{m^3}{6}$.

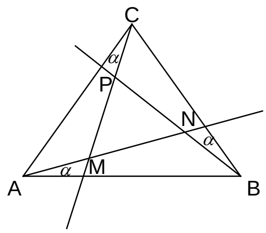
Republičkog takmičenje 2004. godine

VI razred

1. Da bi $m=\frac{n+12}{n}=1+\frac{12}{n}$ bio cio broj potrebno je da n dijeli 12. Dakle, $n\in\{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2,3, 4, 6, 12\}$. Tako je n=-12, m=0. Za n=-6, m=1 i td.Na taj način se formira skup A={0, -1 ,-2, -3, -5, -11, 7, 5, 4, 3, 2 }. Kako je -11 najmanji element skupa A zaključujemo a=-11. Nejednačinu $|3y-2|\leq 6$ zamjenjujemo dvojnom nejednačinom $-6\leq 3y-2\leq 6$. Otuda se dobija $\frac{-4}{3}\leq y\leq\frac{8}{3}$. Dakle, B={ y | $y\in$ Q i $\frac{-4}{3}\leq y\leq\frac{8}{3}$ }.Najveći element skupa B je $\frac{8}{3}$. Uvršćavajući vrijednosti za a i b u datu jednačinu dobijamo

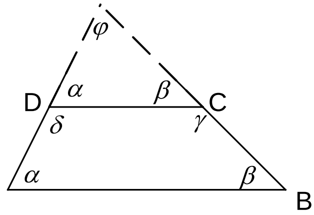
$-\frac{11}{\frac{8}{3}}\cdot x-\frac{1}{2}=5$, čije je rješenje $x=-1\frac{1}{3}$.

2. Za zapisivanjem Aninog telefona postoje sledeće mogućnosti:
a) broj dvojki je 4, a broj trojki 3;
b)broj dvojki je 5, a broj trojki 2;
c)broj dvojki je 6, a broj trojki1.
Sedmocifren broj iz a) bilo kako da su raspoređene dvojke i trojke ne ispunjavaju uslove zadataka jer nije djeljiv sa 3. Naime, da bi broj bio djeljiv sa 12 mora biti djeljiv sa 3 i sa 4. Iz istog razloga otpada slučaj pod b) jer 3 ne dijeli zbir $5\cdot 2+2\cdot 3$. Razmotrimo slučaj pod c). Broj koji se piše pomoću 6 dvojki i jedne trojke djeljiv je sa 3. Ostaje da rasporedimo dvojke i trojke tako da sedmocifren broj bude djeljiv sa 4. Dabi se ovo desilo potrebno je da poslednje dvije cifre traženog broja budu djeljive sa4, što je moguće samo ako su zadnje cifre 32.Dakle, broj Aninog telefona je 2222232.



3. Iz ΔAMC dobijamo $\angle$MAC+$\angle$ACM+$\angle$AMC=180 °, odnosno
60 ° -α -α +$\angle$AMC=180 °. Otuda je $\angle$ AMC=120 °, odnosno $\angle$PMN=60 °. Na isti način se pokazuje da je $\angle$MNP=60 °. Ovim je tvrđenje dokazano.

4. Neka se produžeci krakova AD i BC, trapeza ABCD sijeku u tački E i neka je $\angle$EDC=α i $\angle$DCB=β, kao uglovi sa paralelnim kracima. Kako je δ spoljašni ugao ΔDCE biće



$\delta = \beta + \varphi$ ....(1)

Na isti način se dokazuje da je

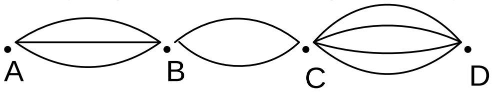
$\gamma = \alpha + \varphi$ ....(2)

Sabiranjem jednakosti (1) i (2) dobijamo

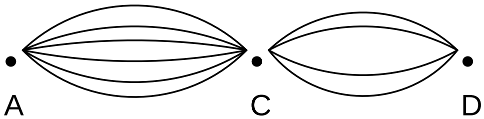
$\delta + \gamma = \beta + \alpha + 2\varphi$.

Iz ove jednakosti slijedi $\delta + \gamma \succ \beta + \alpha$.

5. Situacija opisana u zadatku prikazana je slikom



Iz grada A u grad C preko grada B stiže se na $3 \cdot 2 = 6$ načina. Grad B izostavljamo iz dalje analize.
Nova situacija (kada iz A stižemo u D preko grada C) prikazana je sledećoj slici.



Sa slike zaključujemo da iz grada A u grad D preko C stižemo na $6 \cdot 4 = 24$ različita načina.

VII razred

1. Kako je $b = \dfrac{a+c}{2}$ tada je

$$ab + bc - ac - b^2 = \frac{a+c}{2} \cdot (a+c) - ac - (\frac{a+c}{2})^2 = \cdots =$$

$\dfrac{a^2 - 2ac + c^2 4}{} = \dfrac{(a-c)^2}{4}$. Tvrđenje je dokazano jer je $a \neq c$.

2. Podnožje normale iz tčke O(presjek dijagonala kvadreta) su tačke D i E. Uočimo trouglove EBO i DAO i dokažimo njihovu podudarnost. Iz podudarnosti slijedi da je OD=OE, odnosno da je četvorougao ECDO kvadrat čiju dužinu dijagonale treba izračunati $x =$|CO|=? Hipotenuza ABC je $c = \sqrt{10}$, a dijagonala kvadrata određenog je $d = 2\sqrt{5}$. Označimo stranice kvadrata ECDE sa y, pa je

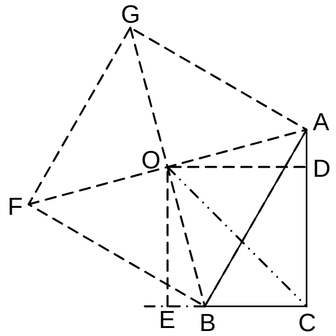
$x^2 = 2y^2$............(1)

Iz pravouglog trougla ΔDAO postavimo jednačinu

$y^2 = (\frac{d}{2})^2 - (3-y)^2$ ....(2)

Rješavanjem jednačine (2) dobijamo da je $y = 2$ ili $y = 1$.

Očigledno je $|CD| = |CE| = 2$, pa zamjenom u jednačinu (1) dobijamo da je traženo rastojanje $x = 2\sqrt{2}$.

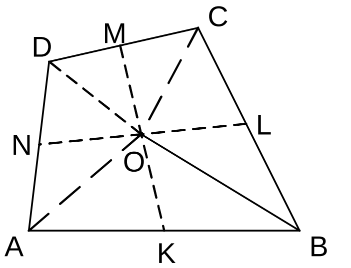


3. Iz uslova zadatka zaključujemo da su površine sledećih parova trouglova međusobno jednaka (imaju jednaku po jednu stranicu i njoj odgovarajuću visinu). Navodimo parove jednakih površina:

$P_{\Delta AKO} = P_{\Delta KBO}, P_{\Delta LCO} = P_{\Delta BLO}, P_{\Delta CMO} = P_{\Delta MDO}$ i

$P_{\Delta AON} = P_{\Delta DNO}$. Sabiranjem lijevih stran navedenih jedanakosti dobijamo da su one jednake zbiru njihovih desnih strana. Otuda je $P_{\Delta AKO} + P_{\Delta LCO} + P_{\Delta CMO} + P_{\Delta AON} = P_{\Delta KBO} + P_{\Delta BLO} + P_{\Delta MDO} + P_{\Delta DNO}$ pa je

$P_{AKON} + P_{CMOL} = P_{BLOK} + P_{DNOM}$.



4. Neka je x broj učenika VII_1, a y broj učenika VII_1 odjeljenja. Procenat dječaka u VII_1 je $55\%x = \frac{11}{20}x$, a u VII_2 je $45\%y = \frac{9}{20}y$, a u oba zajedno $55\%(x+y) = \frac{13}{25}(x+y)$. Kako je zbir dječaka iz VII_1 i VII_1 jednak je ukupnom broju dječaka sedmog razreda ove škole, to možemo furmirati sledeću jednakost $55\%x + 45\%y = 52\%(x+y)$. Izražavanjem iz poslednje jednakosti x preko y dobijamo $x = \frac{7}{3}$.

5. Kako se kvadrat cifre b završava cifrom b toje b jedna od cifara: 0, 1, 5 ili 6. Ako je $b = 0$ to se broj na lijevoj strani zavšava sa 00, a broj na desnoj srani počinje sa 0, što je nemoguće. Ako je $b = 1$, to iz množenja $2a1 \cdot 2a1$ dobijamo da je $a + a = a$ što je moguće pri $a = 0$, a to je nemoguće što pokazuje predhodni slučaj. Ako je $b = 5$, to se broj na lijevoj strani završava 25, odnosno tada imamo $225^2 = 5025$ pa $b = 5$ ne ispunjava uslove zadatka.

Konačno, za $b = 6$ razlika $(2a6)^2 - a6$ je djeljiv sa100 kada je $a = 7$.

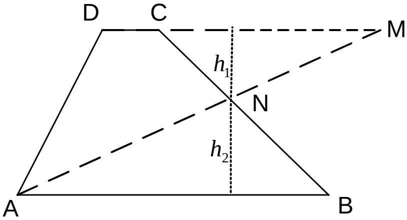
Računanjem se pokazuje $276^2 = 76176$ tj. da su za $a = 7$, $b = 6$ i $c = 1$.

VII razred

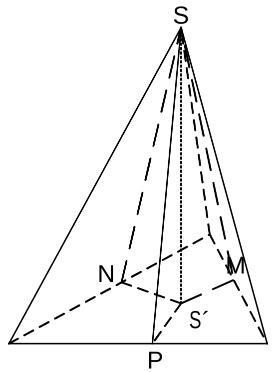
1. Neka je x cijena olovke u centima. Tada iz $1000 \prec 9x \prec 1200$ slijedi $122 \prec x \prec 133$, a iz $1500 \prec 13x \prec 1600$ slijedi $115 \prec x \leq 123$, pa, kako je x cio broj, mora biti $x = 123$.

2. Iz $2a^2 + 2b^2 = 5ab$ dobijamo $a^2 + 2ab + b^2 = \frac{9ab}{2}$, odakle dobijamo $(a+b)^2 = \frac{9ab}{2}$, pa je $a + b = 3\sqrt{\frac{ab}{2}}$. Dalje je $a^2 2ab + b^2 = \frac{ab}{2}$, odnosno $(a-b)^2 = \frac{ab}{2}$, pa je $a - b = -\sqrt{\frac{ab}{2}}$. Znak „-„ je zbog uslova $0 \prec a \prec b$.
Prema tome $\frac{a+b}{a-b} = -3$.

3. Po uslovu zadatka data prava na koordinatmim osama Ox i Oy odsijeca odsječke OA=$\frac{n}{4}$ i OB=$\frac{n}{3}$. Tada je hipotenuza AB Pravouglog trougla OAB jednaka $\frac{5n}{12}$, a površina trougla $\frac{n^2}{24}$. Iz površine ΔOAB i uslova zadatka, slijedi da je hipotenuzina visina $OS = \frac{n}{5} = 12$, pa je n =60, OA=15, OB=20, a površina ΔOAB je 150.



4. Kako je $P_{\Delta ABN} = P_{ANCD} = \frac{1}{2}P_{ABCD}$, to je $\frac{1}{2}ABh_1 = \frac{1}{4}(AB + CD)(h_1 + h_2)$. Dakle, $25h_1 = \frac{1}{4}\cdot 80(h_1 + h_2)$, pa je $h_1 = 4h_2$, odnosno $h_1 : h_2 = 4:1$. Kako je ΔABM ~ ΔCMN, to je AB:CM= $h_1 : h_2 = 4:1$. Znači, CM=$\frac{1}{4}AB = 12{,}5cm.$



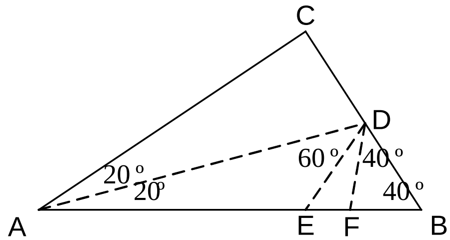
5. Kako je ΔSS´M$\cong$ Δ SS´N$\cong$ ΔSS´P to je S´M= S´N= S´P=r=2cm, a bočne visine su MS=NS=PS=4cm. Otuda je P=72cm ^{2}, V=16$\sqrt{3}$ cm ^{3}.

Savezno takmičenje 2004. godine

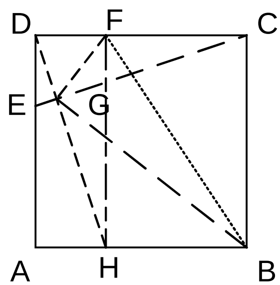
VI razred

1. Traženi broj ne može biti oblika $p \cdot q$, gdje su p i q prosti brojevi, jer bi tada imao ukupno 4 djelioca. Isto tako ne može biti ni oblika $p^2 \cdot q$, jer bi tada imao 6 djelilaca. Jasno je da bi se povećanjem broja prostih djelilaca povečavao i ukupan broj djelilac. Prema tome , traženi broj je oblika p^n. Kako tada postoji $n+1$ djelilac, to je $n=4$. Jedini prost broj čiji je četvrti stepen trocifren broj je 5. Prema tome , postoji samo jedan traženi broj, a to je 625.

2. Na stranici AB uočimo tačke E i F takve da je $\angle$ADE=60 º i $\angle$BDF=40 º . tada je ΔADC $\cong$ ΔADE (zajednička stranica AD i na njoj jednaki uglovi od 20 º i 60 º). Neposreedno se zaključuje da su truglovi: ADF, EFD i FBD jednakokraki sa osnovicama (redom): DF, EF, i BD. Zbog toga je AF=AD i CD=ED=FD=FB pa je AD+DC=AF+FB=AB.



3. Iz ΔDAH $\cong$ ΔCDE i uslova ED=DF slijedi da je AH=DE=DF, jer je HBCF pravougaonik. Dijagonala BF tog pravougaonika je prečnik njegove opisane kružnice. Kako $\angle$HGC=90 º, to tačka G pripada toj kružnici pa je i $\angle$BGF=90º.

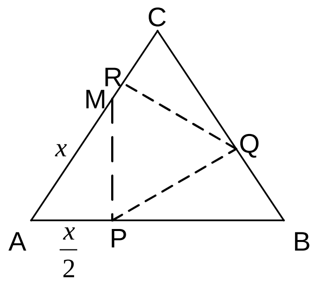


4. Obeležimo traženu duž AM sa x . Tada iz ΔAPM je $AP=\frac{x}{2}$, pa $PB=12\cdot\frac{x}{2}$. Iz ΔPBQ je

BQ=$\frac{1}{2}(12-\frac{x}{2})=6\cdot\frac{x}{4}$, a QC=12-$(6-\frac{x}{4})=6+\frac{x}{4}$.

Iz ΔQCR je RC=3+$\frac{x}{8}$. Iz uclova M$\equiv N$ slijedi

AM+RC=12, odnosno $x+3+\frac{x}{8}=12\cdot\frac{9x}{8}=9x=8cm.$

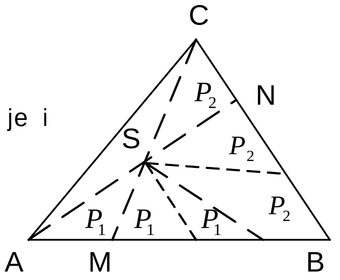


5. Neka sudati prirodni brojevi a, b, c, d i e. Tada je $a+b=x_1, a+c=x_2$, $a+d=x_3, a+e=x_4, b+c=x_5, b+d=x_6, b+e=x_7, a+d=x_8, c+e=x_9$ i $d+e=x_{10}$. Sabiranjem tih jednakosti dobijamo

$4(a+b+c+d+e)=x_1+x_2+\cdots+x_{10}=n+n+1+\cdots n+9=10n+45$.

Kako je lijeva strana jednakosti paran, a desna strana neparan broj, to znači da dobijeni zbirovi ne mogu biti deset uzastopnih prirodnih brojeva.

VII razred



1. Neka je $P_{\Delta AMS} = P_1$ i $P_{\Delta CNS} = P_2$, tada je

$P_{\Delta ABN} = 3P_1 + 2P_2 = \frac{2}{3} \cdot 2004$, $2P_1 + P_2 = 668$. Tada je i

$P_{\Delta BCM} = 3P_1 + 3P_2 = \frac{3}{4} \cdot 2004$, pa je $P_1 + P_2 = 501$.

Sabiranjem dobijenih jednakosti dobijamo

$P_{MBNS} = 3P_1 + 3P_2 = 5001 + 668 = 1169$.

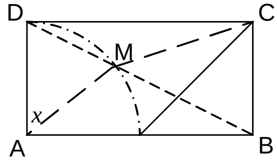
2. Naka je $abc = 1$, to je $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})(c+\frac{1}{c}) = (ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab})(c+\frac{1}{c}) =$

$$= abc + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{c}{ab} + \frac{ab}{c} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{1}{abc} =$$

$$= 1 + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + c^2 + \frac{1}{c^2} + a^2 + b^2 + 1 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + 2 + \frac{1}{b^2} + c^2 + 2 + \frac{1}{c^2} =$$

$$= (a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 + (c+\frac{1}{c})^2 - 4$$

3. Naka je k broj prepunih i m ostalih autobusa. Neka je u prepunim autobusima A, a u ostalim B putnika. Tada je $A \succ 50k$, $B \leq 50m$, odnosno $\frac{A}{k} \succ 50$, $\frac{B}{m} \leq 50$, tj. $\frac{A}{k} \succ \frac{B}{m}$. Ova nejednakost je sa $\frac{B}{A} \prec \frac{m}{n}$, odakle je $\frac{B+A}{A} \prec \frac{m+k}{k}$, odnosna $\frac{A}{A+B} \succ \frac{k}{k+m}$. Dalje je $\frac{A}{A+B} \cdot 100\% \succ \frac{k}{k+m} \cdot 100\%$. Lijeva strana ove nejednakosti predsavlja procenat putnika u prepunim autobusima, a desna procenat prepunih autobusa. Dakle, Radov procenat je veći.



4. Neka je $\angle$DAM= x. Tada iz jednakokrakog trougla AMD je $\angle$AMD=90°-$\frac{x}{2}$, a iz, takođe, jednakokrakog ΔANM je $\angle$MAN=90°-x, $\angle$AMN=45°+$\frac{x}{2}$. S obzirom da je

$\angle$DAM+$\angle$AMN+$\angle$MNB=180°, slijedi $\angle$MNB=180°-(90°-$\frac{x}{2}$)-(45°+$\frac{x}{2}$)=45°.

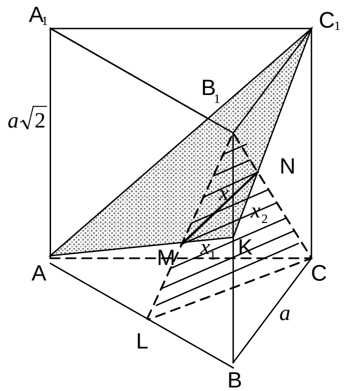
Dakle, traženi ugao je $\angle$BMC=45°.

5. Iz uslova zadatka slijedi da u jednoj koloni može biti samo jedan kvadrat. Kako treba izabrati 2004 kvadrata, to treba izabrati 2004 kolone od mogućih 2005, odnosno jednu kolonu treba izostaviti. Ako se izostavi prva kolona, onda postoje dvije mogućnosti za izbor kvadrata iz druge kolone, a time je određen izbor svih ostalih. Još dvije mogučnosti postoje ako se izostavi poslednja kolona. Međutim ako se izostavi jedana od 2003 preostalih kolona (između prve i poslednje), onda se kvadrati u susjednim kolonama mogu nezavisno birati, u svakoj po dva niza. U tom slučaju ima 4 mogućnosti. Prema tome, ukupno ima 2+2+ $2003 \cdot 4$ =8016 mogućnosti.

VII razred

1. Neka su date tačke $A_1, A_2, \cdots, A_{2004}$. Neka iz datih tačaka polazi redom $n_1, n_2, \dots n_{2004}$ duži. Kako iz jedne tačke može polaziti najmanje 0, a najviše 2003 duži, to je $n_1, n_2, \dots n_{2004} \in \{0, 1, 2, \dots 2003\}$. Razlikujemo dva slučaja:
a) Ako ne postoji tačka iz koje polazi 0 duži onda je
$n_1, n_2, \dots n_{2004} \in \{1, 2, \dots 2003\}$,
pa na osnovu Dirihleovog principa postoje dva od brojeva $n_1, n_2, \dots n_{2004}$ koji imaju istu vrijednost.
b) Ako postoji tačka iz koje polazi 0 duži onda je
$n_1, n_2, \dots n_{2004} \in \{0, 1, 2, \dots 2002\}$, jer tada ne postoji tačka iz koje polazi 2003 duži. Dakle, 2004 broja $n_1, n_2, \dots n_{2004}$ uzimaju vrijednosti pa na osnovu Dirihleovog principa, dva broja imaju jednaku vrijednost.

2. Neka je K središte bočne ivice BB_1 i L središte osnovne ivice AB. Presjek prve ravni i prizme je ΔAKC_1, a presjek druge ravni i prizme je ΔLCB_1. Uočeni trouglovi imaju presjek duž MN čiju dužinu treba izračunati. Iz ΔACC_1, ΔABK i ΔKC_1B_1 izračunajmo redom



$AC_1^{\ 2} = AC^2 + CC_1^{\ 2} = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC_1 = a\sqrt{3}$,

$AK^2 = a^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow$

$AK = a\frac{\sqrt{6}}{2}$,

$C_1K^2 = a^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow C_1K = a\frac{\sqrt{6}}{2}$, Posmatrajmo prvo bočnu stranu ΔBB_1A_1, odnosno ΔABB_1. Duž

MK= $x_1 = \frac{1}{3}$ AK= $a\frac{\sqrt{6}}{6}$, jer je tačka M težište ΔABB_1 i MK trećina težišne duži

AK. Posmatrajmo zatim bočnu stranu BCC_1B_1 , odnosno ΔBC_1B_1.

KN= $x_2 = \frac{1}{3}$ C_1K= $a\frac{\sqrt{6}}{6}$, jr je tačka N težište ΔBC_1B_1 i KN je trećina njegove

težišne duži C_1K. Sada možemo zaključiti da je $\Delta AKC_1 \sim \Delta MKN$, odakle je

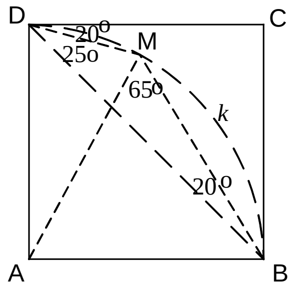
AC_1 : MN=AK : MK=KC_1 : KN, odnosno $a\sqrt{3} : x = 3:1,\ 3x = a\sqrt{3}$, $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

MN= $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

3. Kako je $x^2 + y^3 = z^2$, to je y $y^3 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x)$. Jedna od mogućnosti je $z + x = y^2$, $z - x = y$. Dakle, $z = \frac{y^2 + y}{2} = \frac{y(y+1)}{2}$,

$x = \frac{y^2 - y}{2} == \frac{y(-1)}{2}$. Trojka $(\frac{y(y-1)}{2}, y, \frac{y(y+1)}{2})$ za $y \in \{2, 3, 4, ...\}$ daje beskonačno mnogo rješenjazadane jednačine.

4. U trouglu BDM je $\angle$BDM=25 º, $\angle$DBM=20 º, odakle je $\angle$BMD=135 º. Posmatrajmo kružnicu k sa centrom A, poluprečnika AB. Tetiva BD odgovara četvrtini te kružnice , pa je periferijski ugao nad tom tetivom jednak 135 °. Dakle, tačka M leži na kružnici k . Slijedi da je AM=AB=AD. Trougao MAB je jednakokrak pri čemu je ugao pri osnovici $\angle$ABM=65 º. Prema tome je i $\angle$AMB=65 º, i dalje $\angle$MAB=180 º - $2 \cdot 65$ º=50 º.



5. Obeležimo zbir $\frac{1}{1+a_1^{2004}} + \frac{1}{1+a_2^{2004}} + \cdots + \frac{1}{1+a_{2004}^{2004}}$ sa $A_{i,j}$ gdje je

i,j$\in$\{1, 2,..., 2004\}. Iz uslova $a_i \cdot a_j = 1$ slijedi $a_i^{2004} \cdot a_j^{2004} = 1$, pa je

$$A_{1,2004} = \frac{1}{1+a_1^{2004}} + \frac{1}{1+a_{2004}^{2004}} = \frac{1+a_{2004}^{2004} + 1 + a_1^{2004}}{(1+a_1^{2004})(1+a_{2004}^{2004})} =$$

$$\frac{2+a_{2004}^{2004} + a_1^{2004}}{1+a_1^{2004} + a_{2004}^{2004} + a_1^{2004} \cdot a_{2004}^{2004}} = \frac{2+a_{2004}^{2004} + a_1^{2004}}{2+a_{2004}^{2004} + a_1^{2004}} = 1$$

Na isti način se postiže da je $A_{2,2003} = A_{3,2002} = ... = A_{1002,1003} = 1$. Prema tome traženi zbir je 1002.

Regionalnog takmičenje 2005. godine

VI razred

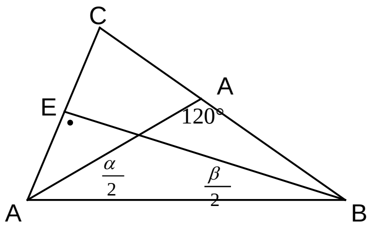
1. Kako je $-\frac{4}{9}=\frac{-4}{9}=\frac{4}{-9}$, proširivanjem srednjeg razlomka prirodnim brojem *k*, i iz uslova zadatka dobijamo jednačinu –4k + 9k = 1025, čije je rješenje *k* = 205. Traženi razlomak je $\frac{-4\cdot 205}{9\cdot 205}=\frac{-820}{1845}$.

2. | x – 2 | · (- 32) = - 64

   | x – 2 | = 2

   x – 2 = 2 ili x – 2 = - 2 Rješenja su x = 4 ili x = o.

3. Iz Δ ABD dobijamo $\frac{\alpha}{2}+\beta=60^o$,



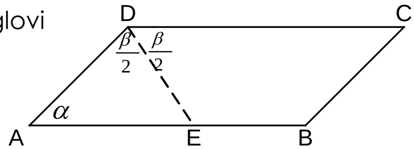
   a iz Δ ABE dobijamo $\alpha+\frac{\beta}{2}=90^o$

   Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

   $\frac{3}{2}(\alpha+\beta)=150°$ (*). Iz ABC dobijamo

   $\alpha+\beta$ + γ = 180°. Zamjenom (*) u poslednjoj jednakosti slijedi γ = 80°

4. Iz AB = 2BC i obima paralelograma dobijamo 36 = 4BC + 2BC ili BC = 6 cm i AB = 12 cm. Neka su α i β uglovi paralelograma.
   Duž DE polovi ugao ADC, pa je
   $\angle$ AED = $\angle$ EDC = $\beta/2$ .Dakle, ΔAED je jednakokraki pa je AD = AE.Otuda je AE = EB = 6 cm.



5. Neka x označava sniženje, a y broj kupaca. Ukupan prihod prije sniženja je 48· y €.

   Poslije sniženja od x € i povećanja broja kupaca za 50%, prihod će biti (48 – x) (y + 50% y) , odnosno 48 y + 25% (48 y). Izjednačavanjem ovih izraza dobija se (48 – x) · $\frac{3}{2}y$ = 60 y . Odavde je 48 – x = 40 ili, x = 8.

   Nova cijena cipela je 40 €.

VII razred

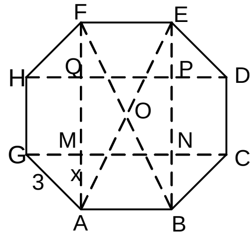
1. a)Neka je $x = 0{,}222...$, a pošto je $0{,}222...$ beskonačan periodični decimalan broj sa dužinom perioda 1 pomnožimo lijevu i desnu stranu jednačine sa 10. Dobijamo: $10x = 2 + 0{,}222...$, gdje ponovo zamijenimo $0{,}222...$ sa x, pa imamo jednačinu $10x = 2 + x$. Rješenje ove jednačine $x = \frac{2}{9}$ je traženi zapis u obliku razlomka.

   b) Drugi beskonačni decimalni zapis možemo zapisati u obliku $4{,}5090909... = 4{,}5 + 0{,}0090909... = \frac{45}{10} + \frac{1}{10}(0.090909...) = \otimes$. Sad kao u prethodnom slučaju stavimo $x = 0{,}090909...$, odakle je $x = \frac{1}{11}$. Vratimo se na početni niz jednakosti, pa imamo: $\otimes = \frac{45}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{11} = ... = \frac{248}{55}$. Dakle, traženi zapis u obliku razlomka je $\frac{248}{55}$.

2. Označimo redom sa x, y i z težine jabuka prvog drugog i trećeg paketa. Iz uslova zadatka postavimo jednačine $x + y + z = 136,\ x = 2y\ i\ y = z + 8$ i izračunmo najprije težine jabuka u paketima. Težine su $x = 72\,kg,\ y = 36\,kg\ \ i\ \ z = 28\,kg$. Dalje iz uslova zadatka postavimo jednačinu: $(72 \cdot 30 + 36 \cdot c + 28 \cdot 50) + 8{,}8\%(72 \cdot 30 + 36 \cdot c + 28 \cdot 50) = 136 \cdot 40$, gdje je c cijena jabuka iz drugog paketa. Rješavanjem ove jednačine dobijamo da je $c = 40\ centi$. Cijena jabuka iz drugog paketa je bila $40\ centi$.

3. U odnosu na dijeljenje sa 83 bilo kojih 2005 prirodnih brojeva možemo rasporediti u 83 kategorije: u prvoj su brojevi koji su djeljivi sa 83, u drugoj su oni koji daju ostatak 1, u trećoj su oni koji daju ostatak 2, ...u osamdeset trećoj su oni koji daju ostastak 82.
   Budući da je $2005 = 24 \cdot 83 + 13$, to znači da postoji kategorija u kojoj ima bar 25 brojeva takvih da je razlika između svaka dva od njih djeljiva sa 83 (Dirihleov princip).
   Dokažimo da je razlika između bilo koja dva iz iste kategorije djeljiva sa 83. Neka su $a\ i\ b$ prirodni brojevi koji pri dijeljenju sa 83 imaju jednake ostatke i neka je $b > a$. Iz jednakosti $a = k_1 \cdot 83 + r\ i\ b = k_2 \cdot 83 + r$, gdje je $k_1, k_2 \in N_0$ i $k_2 > k_1$, a $r \in \{0,1,2,...,82\}$, pa je $b - a = (k_2 - k_1) \cdot 83$. Prema tome razlika $b - a$ je djeljiva sa 83. Dakle, moguće je , a i dokazali smo da je razlika bilo koja dva od njih djeljiva sa 83.

4. Konstruišemo najprije karakterističan ΔABO pravilnog osmougla. Ugao kod tjemena O je centralni i iznosi 45°, a uglovi na osnovici su po $67^\circ 30'$. Opišimo kružnicu sa centrom u tački O i poluprečnikom $r = OA = OB$. Ostala tjemena traženog osmougla $C, D, E, F, G\ i\ H$ dobijamo presijecanjem opisane kružnice sa kružnim lukom poluprečnika $3cm$.



Spojimo tjemena $A\ sa\ F,\ B\ sa\ E,\ C\ sa\ H\ i\ D\ sa\ G$. Uočavamo četiri međusobno podudarna jednakokraka pravougla trougla $AMH,\ BCN,\ DEP\ i\ FGQ$. Označimo dužinu kateta tih trouglova sa $x = AM$, pa je $2x^2 = 3^2$, odnosno $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}cm$. Površina osmougla je zbir površina jednog pravougaonika i dva podudarna trapeza.

$P = P_{ABEF} + 2P_{EBCD} = ... = 18(1+\sqrt{2})cm^2$.

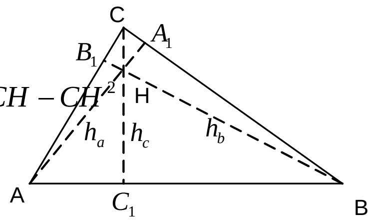
5. Tačka H je ortocentar u kojem se sijeku visine $AA_1, BB_1\ i\ CC_1$ trougla ABC. Uočimo pravougle trouglove B_1BC , B_1HC i vezano za njih sljedeće jednakosti:

$a^2 = h_b{}^2 + CB_1{}^2\ i\ CB_1{}^2 = CH^2 - (h_b - BH)^2 = CH^2 - h_b{}^2 + 2h_b BH - BH^2$.

Zamjenom druge jednakosti u prvu i sređivanjem dobijamo jednakost $a^2 = CH^2 + 2h_b BH - BH^2$ (*). Posmatramo zatim pravougle trouglove CC_1B , C_1BH , pa zapisujemo njima odgovarajuće jednakosti: $a^2 = h_c{}^2 + BC_1{}^2$

i

$BC_1{}^2 = BH^2 - (h_c - CH)^2 = BH^2 - h_c{}^2 + 2h_c CH - CH^2$



.Slično kao i u prethodnom slučaju dobijamo jednakost

$a^2 = BH^2 + 2h_c CH - CH^2$ (**).

Sabiranjem jednakosti (*) i (**) dobijamo jednakost $2a^2 = 2h_b BH + 2h_c CH$ (1). Na sličan način uočavanjem odgovarajućih pravouglih trouglova dolazimo do sljedećih jednakosti:

$2b^2 = 2h_a AH + 2h_c CH$ (2) i $2c^2 = 2h_a AH + 2h_b BH$ (3). Konačno saberemo (1), (2) i (3) i dobijamo jednakost:

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 4(AH \cdot h_a + BH \cdot h_b + CH \cdot h_c)$, odnosno

$a^2 + b^2 + c^2 = 2(AH \cdot h_a + BH \cdot h_b + CH \cdot h_c)$.Što je i trebalo dokazati.

VIII razred

1. Data jednačina se transformiše u: $9x^2+6x+1+16y^2-24y+9=0$ tj.

$$(3x+1)^2+(4y-3)^2=0$$

Ovo je moguće jedino ako je $3x+1=0$ i $4y-3=0$ tj. Ako je $x=-\frac{1}{3}$ $y=\frac{3}{4}$

2. Poslije 6 dana došlo je 6 radnika. Znači da poslije šest dana devet radnika treba da rade još 40 dana pa da posao završe. Taj isti posao će da završi 9+6 radnika za x dana

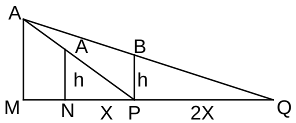
tj. 9 radnika — 40 dana
15 radnika — x dana, pa je $x:40=9:15$

$$15x=40\cdot 9$$

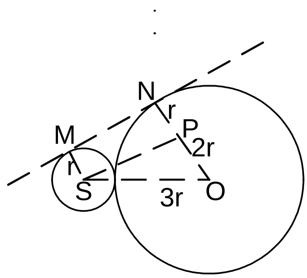
$$x=\frac{360}{15}$$

$x=24$. Ukupno dana: 6 + 24 = 30

3. Neka je Darkova sjenka x, tada je Dejanova sjenka $2x$. Trouglovi SMP i ANP su slični, pa je MP : NP = SM : AN, tj. $(4+x):x=s:h$. Isto tako, iz sličnost trouglova SMQ i BPQ izlazi da je MQ : PQ=SM : BP tj. $(4+3x):2x=s:h$. Iz poslednje dvije jednakosti dobijamo: $(4+x):x=(4+3x):2x$. Rješenje ove jednačine je x=4. Darkova sjenka je dužine 4m, a Dejanova 8m.



4. Neka su S i O centri datih kružnica, a M i N tačke u kojima zajednička tangenta dodiruje kružnice. Neka je, dalje, P tačka polupречnika ON, takva da je četvorougao MNPS pravougaonik. U pravouglom trouglu OPS je kateta OP=2r dva puta manja od hipotenuze OS=4r, pa je ugao $\angle$POS=60º i ugao $\angle$OSP=30º. Samim tim je ugao $\angle$MSO=120º. Tražena površina je razlika površine trapeza i dvaju isječaka:

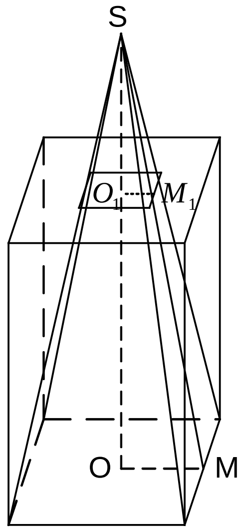


P=(r + 3r)/2· SP – 1/3 r^2 π -1/6(3r)^2 π. Kako je SP= 2r$\sqrt{3}$, dobijamo traženu površinu: P=2r·2r$\sqrt{3}$ – 1/3· r^2 π – 1/6·9 r^2 π = 4r2$\sqrt{3}$ -11/6· r^2 π

5. Kako je D= 10$\sqrt{3}$ cm, to je ivica kocke a=10cm. Visinu H piramide izračunaćemo iz pravouglog trougla SOM :

H= $\sqrt{h^2-(\frac{a}{2})^2}$ = $\sqrt{13^2-5^2}$ = 12 cm.

Zapremina zajedničkog dijela kocke i piramide je razlika zapremine piramide i dijela te piramide, koji je van kocke – to je takođe pravilna četvorostrana piramida, slična datoj.



Trouglovi SOM i SO_1M_1 su slični i

$SO : SO_1 = OM : O_1M_1$. Kako je SO=H=12 cm,

$OM=\frac{a}{2}= 5$ cm, SO_1=H–a=2 cm, biće:12:2=5:O_1M_1,

odakle je $O_1M_1=\frac{5}{6}$ cm. Osnovna ivica a_1 manje

piramide biće: $a_1=2\ O_1M_1=\frac{5}{3}$ cm. Ako sa V

označimo traženu zapreminu, sa V_1 zapreminu date i

sa V_2 zapreminu male piramide, biće :

$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}a^2H - \frac{1}{3}a_1^2 SO_1 = 400 - \frac{50}{27} = 398{,}15$

cm^3

Republičko takmičenje 2005. godine

VI razred

1. Neka je zarada radnika x €. Radnik je dobio x + $\frac{1}{10}x=\frac{11}{10}x$ €. Pošto je vratio dug od 50 €, ostalo je $\frac{11}{10}x-60$ €. Iz uslova zadatka formiramo jednačinu:

$\left(\frac{11}{10}x-60\right):3=90$ Čije je rješenje $x=300$

Dakle, zarada radnika je 300 €.

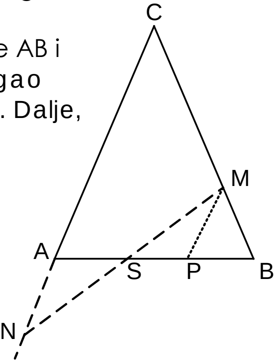
2. Uočimo da je $m \cdot n \cdot p = 1$.
Kako su još m, n i p prirodni brojevi mora biti $m = n = p = 1$.
Neka je $n = 1$. Tada je $\frac{x-3}{2}=1$ ili $x = 5$. Dalje je $1 = \frac{2}{2\cdot 5+y}$, ili $y = -8$.

Zaista je, za x = 5 i y = – 8, $m = \frac{2\cdot 5-8}{5-3}=1$.

3. Svaki od n igrača odigrao je n –1 partiju. Ukupan broj odigranih partija je $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dalje je $\frac{n(n-1)}{2}=55$, ili $n(n-1) = 110$. Rastavljanjem broja 110 na proste činioce i vodeći računa da su n i $n-1$ uzastopni prirodni brojevi, dobija se $n(n-1) = 11\cdot 10$, tj. $n = 11$. Na turniru je učestvovalo 11 igrača.

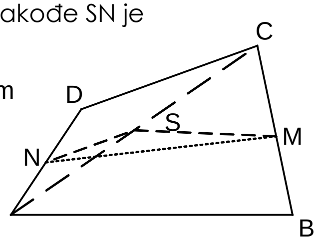
4. Pokazaćemo da je NS = SM, gdje je S presjek osnovice AB i duži MN.Povucimo duž MP paralelnu sa duži AC. Trougao BMP je jednakokraki ($\angle$ CAB = $\angle$ MPB) pa je MP = MB. Dalje, iz AN = MB = MP, $\angle$ NAS = $\angle$ MPS i $\angle$ ANS = $\angle$ SMP slijedi ΔANS $\cong$ ΔSPM, pa je NS = SM.



5. Pokazaćemo da je MN $\leq \frac{1}{2}$(AB + CD). Neka je S sredina dijagonale AC.

Duž MS je srednja linija ΔABC, pa je MS = $\frac{1}{2}$AB. Takođe SN je srednja linija ΔACD, pa je SN = $\frac{1}{2}$DC. Sabiranjem poslednje dvije jednakosti dobijamo:

MS + SN = $\frac{1}{2}$(AB + CD) ili, NM = $\frac{1}{2}$(AB + CD).



Za 3 proizvoljne tačke M, N i S važi:MN $\leq$ MS + SN, pri čemu znak = važi samo ako S $\in$ MN.

Dakle, MN $\leq \frac{1}{2}$(AB + CD).

VII razred

1. Dati izraz $I=1992-52x^2-9y^2+18y-z^2-4z$ može se transformisati u izraz:

$$I=1992-52x^2-(3y-3)^2-(z+2)^2+13=2005-5x^2-(3y-3)^2-(z+2)^2$$

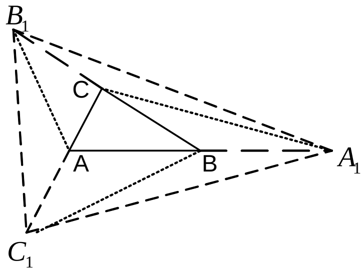
Dobijeni izraz ima najveću vrijednost 2005 u slučaju kada je svaki od kvadrata jednak nuli, a to je za $x=0, y=1$ i $z=-2$.

2. Potrebno je dokazati da je izraz $(p-1)(p+1)$ djeljiv sa 3 i sa 8. Brojevi $p-1$ i $p+1$ su dva susjedna prirodna parna broja , od kojih je jedan djeljiv sa 4, pa je p^2-1 djeljivo sa 8.

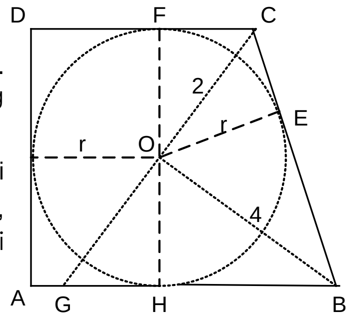
Za dokaz da je p^2-1 djeljivo sa 3, iskoristimo to što su $p-1,\ p,\ p+1$ tri uzastopna prirodna broja od kojih je jedan djeljiv sa 3. Kako je p prost broj, i $p\rangle 3$, to je $p-1$ ili $p+1$ djeljivo sa 3, pa je p^2-1 djeljivo sa 3.

Iz prethodnog se vidi da je broj, p^2-1 djeljiv sa 8 i sa 3, odnosno da je djeljiv sa 24, što je i trebalo dokazati.

3. Povucimo duži: $C_1B,\ A_1C\ i\ B_1A$. Uočavamo trouglove:
ABC, C_1BA,
$C_1A_1B,\ A_1BC,\ A_1CB_1,\ B_1CA\ i\ B_1AC_1$.
Navedeni trouglovi imaju jednake površine (Sobzirom da važi svojstvo: Bilo koja težišna duž dijeli trougao na dva trougla sa jednakim površinama). Konačno, površina trougla $A_1B_1C_1$ je $70cm^2$.



4. Produžimo duž OC preko tačke O tako do presjeca duž AB u tački G. Trouglovi OCF, GHO i OEC su pravougli i međusobno su podudarn (vidi sliku). Takođe trouglovi GBO i OBC su pravougli i podudarni. Izračunamo najprije hipotenuzu BC pravouglog trougla BCO: $BC^2=4^2+2^2$, tj. $BC=2\sqrt{5}cm$.
U pravouglom trouglu OEC je OC=2cm, OE=r i CE=x, pa važi jednačina: $r^2=2^2-x^2$ (1), slično za pravougli trougao BEO važi jednačina $r^2=4^2-\left(2\sqrt{5}-x\right)^2$ (2).
Izjednačimo desne strane jednačina (1) i (2) pa izračunamo $x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, a onda zamjenom u jednačini (1) dobijemo da je $r=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. Kako je $a=r+BC-x=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}cm$, $b=r+x=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}cm$ i $h=2r=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}cm$, to zamjenom u formuli za izračunavanje površine trapeza dobijamo $P=14{,}4cm^2$.



5. a)Neka su $A,B,C,D,E,F,G\ i\ H$ tačke na pravoj p. Treba izbrojati, koliko je svega duži sa njima određeno. Tačka A sa svih ostalih 7 tačaka obrazuje 7 duži. Slično važi za tačku B, a i za tačke C,D,E,F,G i H. Na ovaj način dobijamo $8\cdot 7=56$ duži. Međutim, tako su sve duži brojane dva puta – na primjer duž AB brojali smo i kao duž BA. Zbog toga je na pravoj p određeno

$\frac{8\cdot 7}{2}=28$ duži. Na sličan način izbrojimo da je na pravoj q određeno $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ duži.

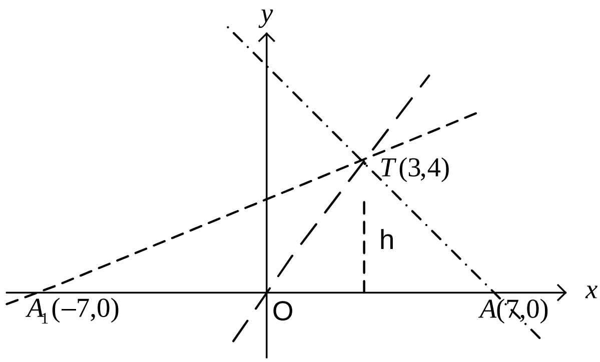
Ako su dva tjemena na pravoj p, a treće tjeme može da bude bilo koje tjeme sa prave q to zaključujemo da takvih trouglova ima $28\cdot 7=196$. S druge strane ako su dva tjemena na pravoj q, a treće tjeme je bilo koje sa prave p, tada takvih trouglova ima $21\cdot 8=168$. Ukupno trouglova ima 196+168=364.

b) Izbrojali smo da na pravoj p ima 28, a na pravoj q 21 duž. Četvorouglovi koje treba da prebrojimo nastaju tako što krajnje tačke bilo koje duži sa prave p spojimo sa krajnjim tačkama bilo koje duži sa prave q. Dakle, četvorouglova u ovom slučaju imamo $28\cdot 21=588$.

VIII razred

1. Iz date jednačine dobijamo: $y=\frac{4}{21}x+\frac{4}{7}$. Tada nejednačina $1<y<2$ dobija oblik $1<\frac{4}{21}x+\frac{4}{7}<2$. Rješenje ove nejednačine je $\frac{9}{4}<x<\frac{15}{2}$, pa je tražena vrijednost promjenljive x iz skupa {3,4,5,6,7}.

2. Jedna prava je OT, a drugu ćemo označiti sa AT, A(x,0). Prema uslovu zadatka, površina trougla OAT je 14, pa kako je visina h=4, imamo: $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot |x| = 14$, odakle je $|x| = 7$, pa je $x=7$ ili $x=-7$. Sada nije teško odrediti jednačine ovih pravih, jer su im poznate koordinate dveju tačka. Tražene prave su:

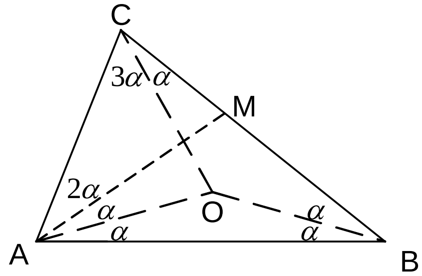


OT : $4x-3y=0$

AT : $x+y=7$.

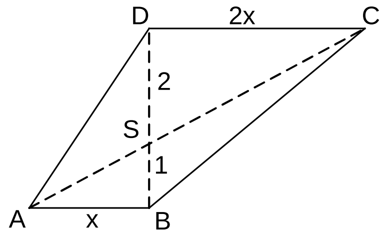
$A_1T: 2x-5y=-14$

3. Neka je O zajednički centar pomenutih kružnica, tada su AO i BO, redom simetrale uglova MAB i ABC. Osim toga, tačka O je jednako udaljena od tjemena trougla ABC, odakle slijedi da su trouglovi AOB, BOC i COA jednakokraki.

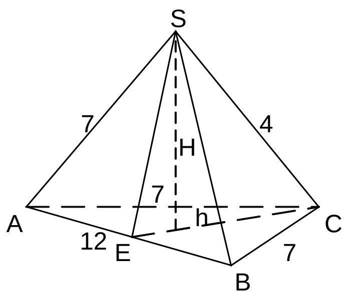


Ako je $\angle$ OAB=α, onda je $\angle$ OAM=$\angle$ OAB=$\angle$ OBC=$\angle$ OCB= α.
Odakle slijedi da je $\angle$ ABC=2α,
$\angle$ CAB=2$\angle$ MAB=4α, $\angle$ BCA=$\angle$ BCO+$\angle$ OCA= α + $\angle$ OAC = α + ($\angle$ OAM+$\angle$ MAC)= α + α + 2α = 4α. Kako je zbir unutrašnjih uglova u trouglu 180°,
$\angle$ ABC+$\angle$ CAB+$\angle$ BCA=2α +4α +4α = 10α =180°
slijedi da je α =18°, $\angle$ ABC=36°, $\angle$ CAB=$\angle$ BCA=72°.

4. Trouglovi ABS i SCD su slični, pa ako sa x označimo dužinu AB, tada je 2x dužina duži CD. Iz uslova da je simetrala ugla $\angle$ BAD izlazi da je $\angle$BAC =$\angle$ CAD. Sem toga je $\angle$ ACD=$\angle$CAB (kao naizmjenični uglovi), pa je $\angle$ CAD=$\angle$ACD i trougao ACD je jednakokrak, što znači da je AD = CD. Pravougli trougao ABD je polovina jednakostraničnog trougla, pa je x = $\sqrt{3}$=d(A,B) i d(A,D) = 2$\sqrt{3}$ =d(D, C). Iz pravouglog trougla BCD izračunavamo:
d(B,C) = $\sqrt{(2x)^2+3^2}$ = $\sqrt{21}$. Obim trapeza je:
O = 5x +$\sqrt{21}$=5$\sqrt{3}$ + $\sqrt{21}$.



5. Neka je E podnožije visine iz tjemena C, jednakokrakog trougla ABC, na stranicu AB. Tada je visina CE=h=$\sqrt{13}$ cm. Trougao ABS je jednakokrak sa visinom SE, pa je SE= h=$\sqrt{13}$ cm. Slično se dokazuje da je i trougao SEC jednakokrak, pa je visina H koja odgovara kraku: H=$\frac{12\sqrt{13}}{13}$ cm.
Zapremina, V piramide SABC je:
V=$\frac{P(ABC)\circ H}{3}$ = 24cm^3, jer je
P(ABC)=6$\sqrt{13}$ cm^2.



Saveznog takmičenje 2005. godine

VI razred

1. Razlikujemo dva slučaja:

1) Ako je p =2, onda je $p^3 = 8$, pa je $249 \cdot p^3 = 248 \cdot 8 = 1992$, što znači da je $q = 2005 - 1992 = 13$.

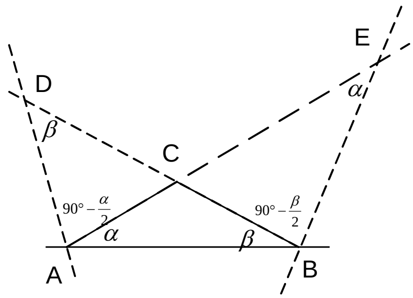
2) Ako je $p \geq 3$, onda je p neparan broj. Tada q mora biti paran, pa je q =2. Znači da je $249 \cdot p^3 = 2003$, pa je $p^3 = \dfrac{2003}{249}$. Kako 2003 nije djeljivo sa 249, to p^3 nije prirodan broj, iz čega slijedi da i p nije prirodan broj. Znači rješenje zadatka je p =2 i q =13.

2. a) 1) $\alpha \prec 90$º i $\beta \prec 90$º;

Δ ABE $\Rightarrow 2\alpha + 90° + \dfrac{\beta}{2} = 180°$;

Δ ABD $\Rightarrow 2\beta + 90° + \dfrac{\alpha}{2} = 180°$;

$\alpha = \beta = 36°, \gamma = 108°$

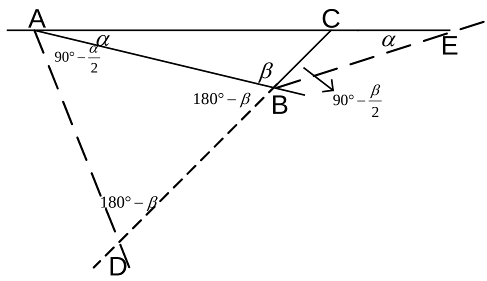


2) $\alpha \prec 90$º i $\beta \succ 90$º;

Δ ABD $\Rightarrow 450° - 2\beta - \dfrac{\alpha}{2} 108°$

Δ ABE $\Rightarrow 2\alpha + 90° + \dfrac{\beta}{2} = 180°$

$\alpha = 12°, \beta = 132°, \gamma = 36°$

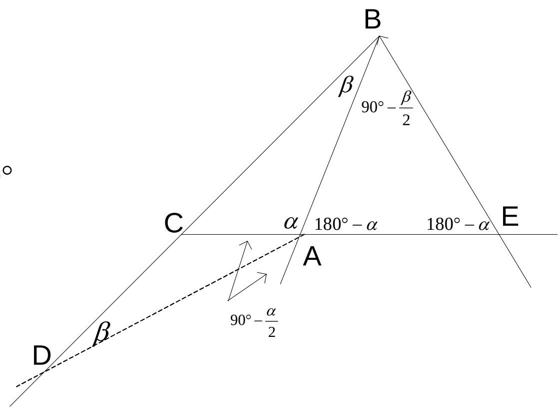


b) $\alpha \succ 90$º;

Δ ABD $\Rightarrow 2\beta + 90° + \dfrac{\alpha}{2} = 180°$

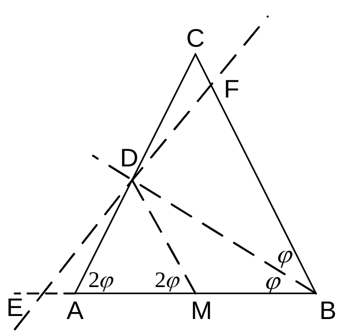
Δ ABE $\Rightarrow 450° - 2\alpha - \dfrac{\beta}{2} 180°$

α =132º, β =12º i γ =36º.



3. Ako sa x označimo cijenu knjige u dinarima, onda je Anka prije kupovine imala x dinara, Branka $\frac{9}{5}x$ i Vesna $2x$ dinara. Poslije kupovine knjige Anka više nema kod sebe novca, Branki je ostalo $\frac{4}{5}x$, a Vesni x dinara. Kako je to ukupno $\frac{9}{5}x$, da bi imali podjednako novca, Branka je korala da da Anki $\frac{1}{5}x$, a Vesna $\frac{2}{5}x$, tj. duplo više od branke. Znači, Vesna je Anki dala 200 dinara.

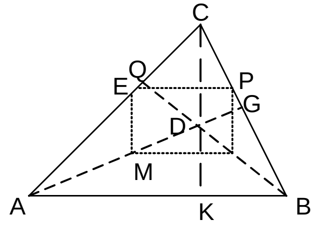
4. Neka prava p siječe BC u tački F i neka je DM‖BC. Trougao BEF je jednakokraki, jer je simetrala $\angle$EBF normajna na osnovicu EF. Zaključujemo da je ED=DF. Kako je DM‖BC, to je DM srednja linija ΔBEF, pa je EM=MB. Tada je težišna duž DM pravouglog ΔBDE jednaka polovini duži BE, tj. DM=$\frac{1}{2}$BE. Kako je ΔAMD jednakokrak ($\angle$DAM=$\angle$DMA=2φ) to je DM=AD=$\frac{1}{2}$BE, pa je BE=2AD.



5. Ako sa x označimo zbir svih dodijeljenih brojeva, tada je zbir bilo kojih osam brojeva dodijeljenih uzastopnim tačkama konstantan i jednak je $x-5\cdot 1000$. Kako je $108=13\cdot 8+4$, na sličan način zaključujemo i da je zbir bilo koja četiri broja dodijeljena dodijeljena uzastopnim tačkama takođe konstantan i jednak $1000:5=200$ (jer pet „četvoročlanih blokova“ stoje u „dvadesetočlani blok“). Prema tome, tačkama $A_1, A_2, A_3 ... A_{4n+1}, ... A_{105}$ dodijeljen je broj 1; Tačkama $A_2, A_6, ... A_{4n+2}, ... A_{106}$ dodijeljen je broj 50, tačkama $A_3, A_7, ... A_{4n+3}, ... A_{107}$ dodijeljen je broj 19 i konačno tačkama $A_4, A_8, ... A_{4n}, ... A_{108}$ dodijeljen je broj $130 = 200-(1+50+19)$.

VII razred

1. Neka je K podnožije Visine iz tjemena C.
Duž MN je srednja linija trougla ΔABD, pa je
MN=$\frac{1}{2}$AB i MN‖AB. (1)
Duž QP je srednja linija ΔABC, pa je



QP=$\frac{1}{2}$AB i QP∥AB.   (2)

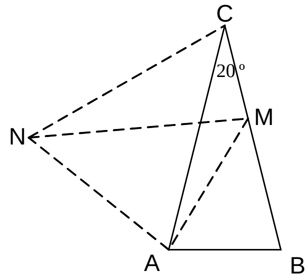
IZ (1) i (2) slijedi da je MNPQ paralelogram. DUŽ NP je srednja linija ΔBCD, pa je PN∥CD. Kako je CD⊥AB, odnosno MN, to je PN⊥MN, tj. MNPQ je pravougaonik.

2. Dokazaćemo da je broj $(n-3)(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)(n+3)+36$ kvadrat nekog prirodnog broja.
$(n-3)(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)(n+3)+36=$
$=(n^2-9)(n^2-4)(n^2-1)+36=n^2(n^4-14n^2+49)=(n(n^2-7))^2$.

3. Pošto su 3 i 8 uzajamno prosti brojevi, dovoljno je dokazati da je broj $m+n$ djeljiv sa 3 i 8. Iz uslova slijedi da mn pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 2, što je moguće jedino ako jedan od brojeva m i n ima ostatak 1, a drugi ima ostatak2 pei dijeljenju sa 3. Kako je zbir ostataka brojeva m i n pri dijeljenju sa 3 broj3, slijedi da je broj $m+n$ djeljiv sa 3. Slično, pri dijeljenju sa 8 broj m i n ima ostatak 7, što je moguće jedino ako je jedan od brojeva m i n ima ostatak 1, a drugi 7, ili ako jedan ima ostatak 3 a drugi 5. U oba slučaja zbir ostataka brojeva m i n pri dijeljenju sa 8 je broj 8, iz čega slijedi da je broj $m+n$ djeljiv sa 8.

4. Skup A={00,01,...23} sadrži brojeve koji određuju sate. Ako u svakom broju skupa A cifre zamijene mjesta dobije se 24 broja, među kojima ima 16 njih koji mogu predstavljati sekunde.
Skup B={00,01,....,59} sadrži brojeve koji određuju minute i sekunde. Ako u svakom broju iz skupa B cifre zamijene mjesta dobija se 60 brojeva , među kojima ima 36 njih koji mogu predsavljati minute. Na primjer,00, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 80, 90 prvih šest određuju broj minuta na digitalnom časovniku, a poslednje četiri ne određuju broj minuta. Ako u svakom broju iz skupa B cifre zamijene mjesta, dobija se 60 brojeva među kojima ima 16 njih koji mogu predstavljati sate. Navedeno tvrđenje se dokazuje neposrednim provjeravanjem. Kako se svaki broj sati može kombinovati sa svakim brojem minuta i svakim brojem sekundi, to je na osnovu pravila proizvoda traženi broj jednak $16\cdot36\cdot16=9216$

5. Neka je N tačka takva da je ΔMCN≅ΔABC(N je sa iste strane prave BC sa koje je i tačka A).



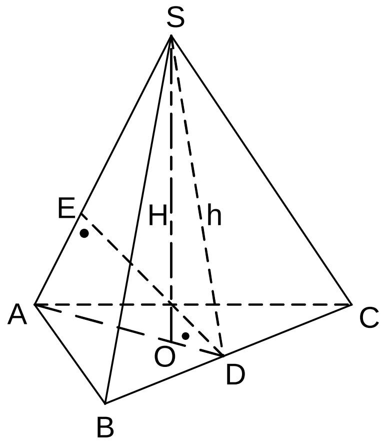
NCA=∠NCM-∠ACM=50º -20º=40º.
Kako je CN=CA trougao ACN je jednakostraničan, pa je i ∠CNA=60º.
Slijedi da je
∠MNA=60º-20º=40º.
Trougao AMN je jednakokrak jer je AN=MN. Njegov ugao pri vrhu N je
∠MNA=∠CNA-∠CNM=60º -20º=40º, pa je ugao pri osnovici ∠NMA=70º. Kako je ∠CMA=70º +80º

=150º, pa je
$\angle$ AMB=180º -150º =30º.

VIII razred

1. Kako je 9999=$9\cdot 11\cdot 101$, slijedi da je broj jedinica u zapisu traženog broja djeljiv sa 9 i 11, dakle i sa 99. S druge strane , traženi broj je
$$101+101\cdot 10^4+101\cdot 10^8+...$$
ili
$$1+101\cdot 10^4+101\cdot 10^8+...$$
U zavisnosti od toga da li je broj jedinica paran ili neparan.
U prvom slučaju broj je djeljiv sa 101, u drugom pri dijeljenju sa 101 daje ostatak 1.
Dakle, broj jedinica u zapisu broja mora biti paran. Najmanji paran prirodan broj koji je djeljiv sa 9 i sa 11 je 198. Traženi broj u zapisu sadrži 198 jedinica i 197 nula , tj. ima ukupno 395 cifara.

2. Trouglovi AOS i ADE su slični jer je $\angle$ AOS=$\angle$ DEA=90º (iz uslova zadatka) i $\angle$ OAS=$\angle$ ADE (kao uglovi sa normalnim kracima). Iz uočene sličnosti postavimo proporciju AD:AS=AE:AO, gdje djelimičnom zamjenom dobijamo
$$a^2=2\cdot AE\cdot AS \quad (1)$$
Dalje iz uslova zadatka imamo AE:ES=9:8i AS=AE+ES, pa je $ES=\frac{8}{9}AE$ i
$AS=\frac{17}{9}AE$. Zamjenom u jednakost (1) dobijamo
$$AE=\frac{9}{\sqrt{34}} \text{ i } AS=\frac{17}{\sqrt{34}}$$
Iz pravouglog trougla AOS i pomoću Pitagorine teoreme je $OS^2 AS^2-AO^2$, gdje je
$$AO=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\text{, dobijamo } OS^2=\frac{11}{2}.$$



Primjenom Pitagorine teoreme na trougao ODS koji je takođe pravougli,
$SD^2=OD^2-OS^2$, gdje je
$OD=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, izračunajmo visinu
bočne strane $SD=\frac{5}{2}$. Konačno zamjenom u formuli
$$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3a\cdot SD}{2}=\frac{9}{4}(\sqrt{3}+5)dm^2$$

3. B= $\left| \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c} \right| = \left| \frac{a^2c+b^2a+c^2b-b^2c-c^2a-a^2b}{abc} \right| =$

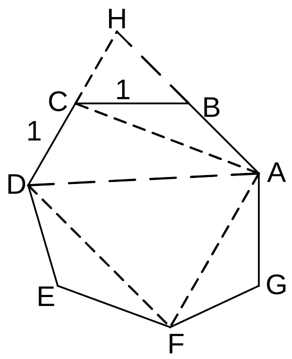
$\left| \frac{a^2c+b^2a+c^2b-b^2c-c^2a-a^2b+abc-abc}{abc} \right| = \left| \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{abc} \right|$.

Kako su a,b i c stranice trougla, to je:

$|b-c| \prec a$, $|c-a| \prec b$ i $|a-b| \prec c$, pa je $B \prec 1$

4. Produžimo stranice AB i DC do presjeka u tački H. Četvorougao AHDF je romb, jer je AH=DF,DH=FA i AF=DF. Kako je AC=AF, to je AC=AH. IZ sličnosti trouglova HBC i HAD slijedi
BC:AD=BH:AH, tj.
1:AD=(AH-1):AH=(AC-1):AC, pa je

$$\frac{1}{AD}+\frac{1}{AC}=1$$



5. Neka je A plava tačka i B njoj dijamatralno suprotna tačka . Preostale tačke su krajevi tetiva koje su su normalne na prečnik AB. Ako je B plava tačka, tada jedna od tih tetiva ima crcene krajeve, pa je A središte luka određenog tom tetivom.
Ako je B crvena tačka , tada prema uslovu zadatka postoji tetiva čiji su krajevi plavi. Kako među preostalim tačkama ima manje crvenih nego plavih tačaka, postoji i tetiva sa crvenim krajevima. I u ovom slučaju tačka A je središte luka određenog tom tetivom.

Regionalno takmičenje 2006. godine

VI razred

1. Dati uslov je ekvivalentan sa $-\frac{8}{12} \prec \frac{x-1}{1212} \leq 3$, odakle je $-8 \prec x-1 \leq 3$. Dalje je $-7 \prec x \leq 4$. Kako je $x \in Z$, to je $x \in$\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.

2. Neka je cijena patika x €. Poslije povećanja nova cijena je

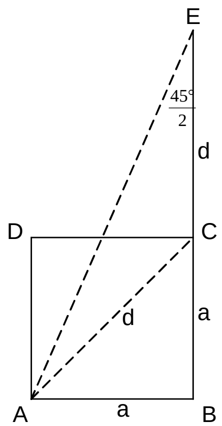
$$x + x\cdot\frac{1}{10} = (1+\frac{1}{10})x = \frac{11}{10}x.$$

Nakon sniženja ove cijene za 10%, nova cijena je

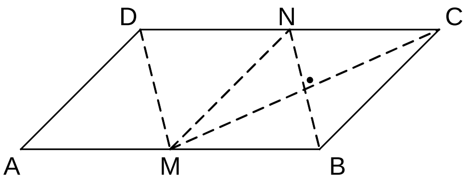
$$\frac{11}{10}x - \frac{11}{10}x\cdot\frac{1}{10} = (\frac{110}{100}-\frac{11}{100})x = \frac{99}{100}x.$$

Shodno uslovu zadatka, formiramo jednačinu

$\frac{11}{10}x - \frac{99}{100}x = \frac{55}{10}$, čije je rješenje $x = 50$.



3. Pretpostavimo da je zadatak riješen (slika). Ugao BCA je spoljašni ugao jednakokrakog trougla ACE, pa je $\angle$CEA=$\frac{45°}{2}$. Dakle, prvo treba konstruisati pravougli trougao ABE($\angle$ABE=$90°$, $\angle$BEA=$\frac{45°}{2}$ i BE=$a+d$ data duž). Dalja konstrukcija je očigledna.



4. Četvorougao MBCN je romb, pa je MC$\perp$BN. Pošto je MB$\parallel$DN i MB=DN, četvorougao MBND je paralelogram (BN$\parallel$MD). Dalje je $\angle$DMC=$\angle$NOC=90º (kao uglovi sa paralelnim kracima) što je zadatkom tvrđeno.

5. Prvi zadatak nijesu riješila 4 učenika, drugi5, treći 6 i četvrti 7 učenika. Dakle, moguće je da 4+5+6+7=22 učenika nijesu riješila sva četiri zadatka. Preostala tri učenika su riješila sve zadatke.

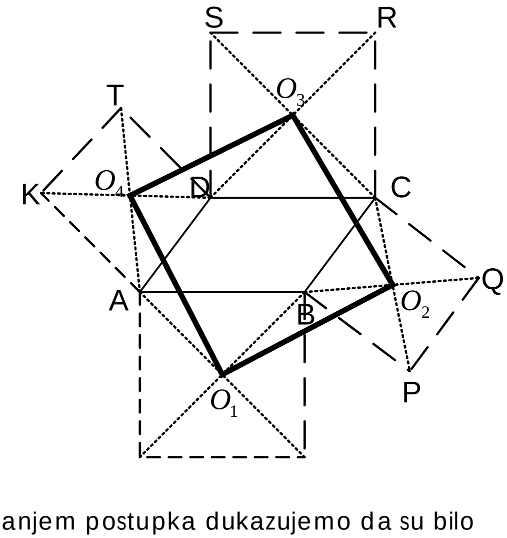
VII razred

1. Neka traženi razlomak ima oblik $\frac{p}{q}$ i iz uslova zadatka imamo nejednakost $\frac{1}{2006} \prec \frac{p}{q} \prec \frac{1}{2005}$ (1). Nejednakost (1) možemo zapisati u sledećem obliku $2005 \cdot p \prec q \prec 2006 \cdot p$, odakle uočavamo da zadatak nema rješenja za $p=1$. Za $p=2$ dobijamo nejednakost $4010 \prec q \prec 4012$, pa imamo da je $q = 4011$. Ako je $p=3$ dobija se nejednakost $6015 \prec q \prec 6018$ itd. Dakle traženi razlomak sa najmanjim mogućim imeniocem dobijamo za $p=2$, odnosno on glasi $\frac{p}{q} = \frac{2}{4011}$.

2. Dovoljno je dokazati, da je broj $12^{42}+9^{42}$ djeljiv sa 3 i 5. Prvi dio je lak, jer su brojevi 12 i 9 djeljivi sa 3, pa je i broj $12^{42}+9^{42}$ djeljiv sa 3. Dalje broj je djeljiv sa 5 ako se završava sa 0 ili 5. Iz jednakosti $(12^2)^{21}=144^{20}\cdot 144$ zaključujemo da se broj 144^{20} završava sa 6, a poslednja cifra 12^{42} je 4. Poslednja cifra broja 9^{42} je 1. Konačno zbir $12^{42}+9^{42}$ je broj koji se završava sa cifrom 5, pa je on djeljiv sa 5. Tvrđenje je dokazano.

3. Data su tri pravilna šestougla sa stranicama a_1, a_2 i a_3. Potrebno je konstruisati pravilan šestougao tako da njegova površina bude jednaka zbiru površina datih pravilnih šestouglova, tj. $P=\frac{3\sqrt{3}}{2}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$. Ako sa a označimo stranicu traženog šestougla, biće $a^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ (*). Duž a se može lako konstruisati primjenom Pitagorine tereme. Obilježimo sa t^2 zbir prva dva sabirka desne strane napisane jednakosti (*), tj. $t^2=a_1^2+a_2^2$, pa se pa se t konstruiše kao hipotenuza pravouglog trougla sa katetama a_1 i a_2. Dalje je $a^2=t^2+a^2$, pa se a konstruiše kao hipotenuza pravouglog trougla sa katetama t i a_3. Na kraju se konstruiše šestougao stranice a.

4. U ravni je dat paralelogram ABCD i nad njegovim stranicama sa spoljne strane su konstruisani kvadrati AMNB, BPQC, CRSD i ADTK sa centrima O_1, O_2, O_3 i O_4. Treba dokazati da je četvorougao $O_1O_2O_3\,O_4$ kvadrat. Uočimo trouglove: AO_1O_4, $O_1O_2B, O_2CO_3, O_3O_4D$. Dokažimo npr. $\angle\, AO_1O_4 \cong \angle\, O_1O_2B$, jer je $AO_1=O_1B, O_4A=BO_2$ (kao polovine dijagonala podudarnih kvadrata), $\angle$DAB=$\angle$NBP (kao uglovi sa normalnim kracima) i $\angle\, O_4AO_1=\angle O_1BO_2$ (sus). Iz dokazane podudarnosti slijedi $O_4O_1=O_1O_2$ i $\angle AO_1O_4=\angle BO_1O_2$, odnosno $\angle AO_1B=\angle O_4O_1O_2=90^\circ$. Nastavljanjem postupka dukazujemo da su bilo koja dva od navedenih trouglova podudarna, odnosno da je četvorougao $O_1O_2O_3\,O_4$ kvadrat.



5. Označimo raznobojne ruže brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Uzmimo ružu 1 i formirajmo trojke na sledeći način: 123, 124, ..., 167; takvih ima $\frac{6\cdot 5}{2}=15$, zatim uzmemo ružu 2 i formiramo trojke: 234, 235,..., 267; kojih ima $\frac{5\cdot 4}{2}=10$. Dalje uzmemo ružu 3 i formiramo trojke: 345, 346, ..., 367, kojih ima $\frac{4\cdot 3}{2}=6$, pa uzmemo ružu 4 i formiramo trojke 456, 457,i 467 kojih je $\frac{3\cdot 2}{2}=3$ i na kraju imamo trojku ruža 567, dakle 1. Konačno broj buketa –trojki iznosi 15+10+6+3+1=35. Prema tome moguće je napraviti 35 buketa sa po tri raznobojna cvijeta.

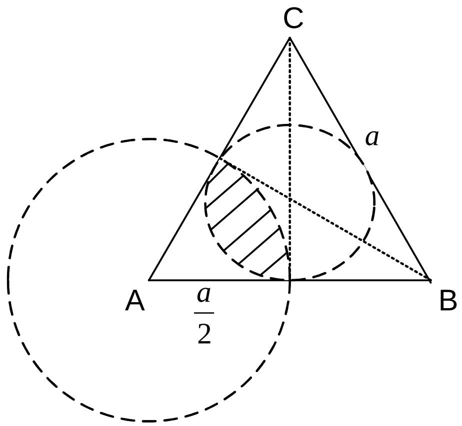
VIII razred

1. Pomnožimo datu relaciju $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$ sa 2 i dobijamo jednakost $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2=0$. Odavde je očigledno $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$, pa dobijamo da je $a-b=b-c=a-c=0$, tj. $a=b=c$.

2. Data jednačina $\frac{2x-5}{3}+\sqrt{x^2-8x+16}=\frac{2}{3}+\frac{x-2}{6}+\frac{x-4}{2}$ je ekvivalentna sa
$\frac{2x-5}{3}+|x-4|=\frac{2}{3}+\frac{x-2}{6}+\frac{x-4}{2}$
Za x$\geq$4 jednačina se svodi na x=4, šio je jedno rješenje jednačine. Za x$\prec$4 jednačina se svodi na 0=0, što tnači da je svako $x\prec 4$ rješenje jednačine. Od ovih rješenja skupu prirodnih brojeva pripadaju 1, 2 i 3. Tražena rješenja su $x\in$\{1, 2, 3, 4\}.

3. Neka je broj stolica sa 3 noge x, a broj stolica sa 4 noge y. Tada je broj učenika u sali $x+y$, pa je ukupan broj nogu u sali $3x+4y+2(x+y)=77$. Dakle, $5x+6y=77$. Jednačina ima tri moguća rješenja: x=13, y=2 ili x=7, y=7 ili x=1, y=12.

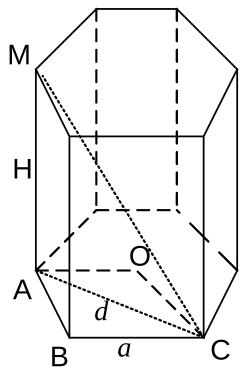
4. Površina dijela između kružne linije dobijamo kao razliku površina kružnog isječka i trećine razlike površine trougla i kruga k_1.



$$P=(\frac{a}{2})^2\pi\frac{60}{360}-\frac{(\frac{a}{2})^2\sqrt{3}-(\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2})^2\pi}{3}=\frac{a^2\pi}{24}-\frac{a^2\sqrt{3}}{12}+\frac{a^2\pi}{36}=\frac{a^2}{12}(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}).$$

5. Ako je kraća dijagonala prizme $8\sqrt{6}$ cm i ako ona sa osnovom zaklapa ugao od $45°$, onda je trougao ACM jednakokrako-pravougli, pa je manja dijagonala osnove jednaka visini prizme $d=H=\frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=8\sqrt{3}cm$.

Iz $d=a\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ slijedi $a=8cm$. Zapremina prizme je $V=6a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot H=2304cm^3$.



Republičko takmičenje 2007. godine

VII razred

1. Dužina koraka brata je $\frac{4}{3}$ dužine koraka sestre, pa ako brat po dužini vrta napravi x koraka, sestra će napraviti $\frac{4}{3}x$ koraka. Ako sa y označimo broj koraka koje napravi brat po širini vrta, sestra će napraviti $\frac{4}{3}y$, dobićemo sistem jednačina:

$$x+\frac{4}{3}y=270$$

$$\frac{4}{3}x + y = 290$$

čije je rješenje **:** $x = 150$**,** $y = 90$. Pa je: P = $x \cdot y$ **.**0.8 .0,8 =8640 m^2

2. Označimo sa p masu prazne posude, sa v masu vode. Tada je p + 80%v = 88%2000.

Kako je, po uslovu zadatka, $p + v = 2000$, to je $2000 - v + \frac{80}{100}v =$

$= \frac{88}{100}2000$, tj. $2000 - 1760 = v - \frac{4}{5}v$. Odavde slijedi da je $v = 1200$g, a

$p = 2000 - 1200$

$p = 800$g.

3. $(x^2+x+1)(x^3+x^2+1) - 1 = x^5 + x^4 + x^2 + x^4 + x^3 + x + x^3 + x^2 + 1 - 1 =$

$= x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x = x(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) =$

$x((x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + 2x + 1)) = x(x^2(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1)) =$

$= x(x+1)^2(x^2+1)$. Očigledno je $x(x+1)^2(x^2+1) < 0$ za svako $x < 0$ i $x \neq -1$

$x(x+1)^2(x^2+1) > o$ za svako $x > o$.

4. Hipotenuza c pravouglog trougla jednaka je $2R$, pa je R =10cm). Kako je $r : R$ =2 : 5, to je r = 4 cm. S druge strane c = a- r+b-r, što znači da je

a+b = c+2r = 28cm. Kako je $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, to je

$28^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, odnosno

$784 = a^2 + b^2 + 2ab$.

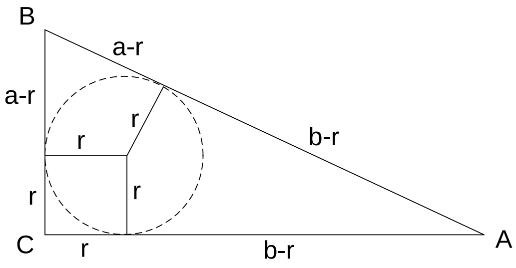
Saglasno Pitagorinoj teoremi

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + b^2 = 400$, tj.

$2ab = 784 - 400$

$2ab = 384$.



Dakle, površina trougla je

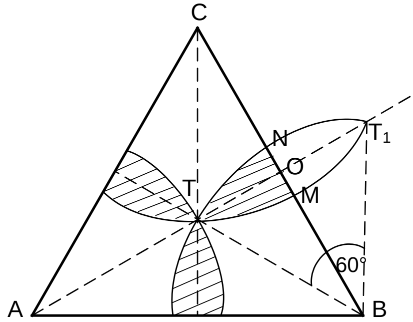
P = ab :2 =2ab : 4 = 384 : 4 = 96

P= 96cm^2 .

Obim tog trougla je O = a+b+c =(a+b) +c = 28+ 20 = 48 .

O = 48cm.

5. Produžimo lukove sa centrima B i C do presjeka T_1, kao što je prikazano na sl.2. Trougao BTT_1 je jednakostraničan, u šta se lako možemo uvjeriti. Površina jednog lista naše ruže jednaka je površini P_1 odsječka nad tetivom TT_1.
Kako je:



$P_1 = \frac{1}{6}BT^2\pi - BT^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, a $BT = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

tada je: $P = 3P_1 = 3(\frac{1}{6}(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2\pi - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}) = 3(\frac{a^2}{18}\pi - \frac{3a^2\sqrt{3}}{36}) = \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Obim trolisne ruže sadrži tri luka kružnice poluprečnika $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, kojima odgovaraju centralni uglovi od 60°, i tri duži koje su jednake duži MN na sl. Zbir ova tri luka je polovina obima kružnice istog poluprečnika. Kako je
$MN = 2(\frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}a) = 2a(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2})$, to je obim figure $O = \frac{a\sqrt{3}}{3}\pi + 2a\sqrt{3} - 3a$.

Opštinsko takmičenje 2004. godine

III razred

1. Svaka stranica unutrašnjeg pravougaonika kraća je za $2\cdot 5$cm=10cm. Dakle, obim unutrašnjeg ruba iznosi: 120cm-$4\cdot 10$ cm=80cm.

2. Neka je masa jedne cigle x. Iz uslova zadatka je $3\cdot x+6=4\cdot x+2$. Rješavanjem dobijene jednačine je x=4kg.

3. Neka se to desi za x godina. Tada će majka imati 35+x, a kćerka 9+x. Kako mora biti $3\cdot(9+x)=35+x$, tj. $27+3\cdot x=35+x$ to je $2\cdot x=8$. Dakle, $x=4$ godine.

4. Ako jedan sabirak umanjimo za 84, a drugi uvećamo za 62 zbir se smanji za 84-62=22 i sada iznosi 756-22=734. Kako je 734:2=367, to je prvi od brojeva 367+84=451, a drugi je 367-62=305. (Provjera : 451+305=756)

5. III razred: 240:2=120 učenika
II razred: 120:3=40 učenika
I razred: 240-(120+40)=240-160=80 učenika.

Opštinsko takmičenje 2005. godine

III razred

1.
a) 9:9+9-9 = 1 b) (9+9) : (9+9) = 1
c) (9.9:9):9 = 1 d) 99:99 = 1

2. Ako označimo sa x broj tegova od 3 kg, tada je $24-x$ broj tegova od 5 kg. Na prvom tasu je $3\cdot x$ kg, a na drugom $(24-x)\cdot 5$ kg.
Otuda je $3x=(24-x)\cdot 5$. Rješenje ove jednačine je $x=15$. Znači, na jednom tasu ima 15 tegova od 3 kg, a na drugom 9 tegova od 5 kg.

3. Ocu je 38 godina. Godine sinova su 8, 6, 4 i 2. Ako će kroz x godina otac imati godina koliki je zbir godina sinova, dobijamo:
$(8+x)+(6+x)+(4+x)+(2+x)=38+x$
Rješenje ove jednačine je $x=6$. Znači, kad ocu bude 44 godine toliki će biti zbir godina njegovih sinova.

4. Kako je a-b+c = 986, vrijednost novog izraza je
(a – 86)-(b – 86)+(c – 86) = a-b+c -86 = 900.

5. Obim svake od njiva jednak je 320 : 2 = 160 m . Stranica kvadrata je 160 : 4 = 40 m , a širina pravougaonika je 40 : 2 = 20 m . Druga stranica je (160 – $2\cdot 20$):2= 60 m.

IV razred

1. To su brojevi oblika a*a. Cifra a može imati 9 vrijednosti, a umjesto * može stajati bilo koja od 10 cifara. Dakle, takvih brojeva ima $9\cdot 10$ = 90.

2. 3805-a-b = 3805-(a+b) = 3805-1800 = 2005.

3. \|---------- x ----------/-------64-------------\|
\|---------- x ----------/-------56--------\|
\|---------- x ----------/-------40----\|
Sa slike je očigledno da je $3x$ + 64 + 56 + 40 = 310
$3x$ = 150
x = 50
Dakle, prvi dječak je imao 114€ , drugi 106€ , a treći 90€ .

4. Stranice tih kvadrata su po 10 cm, a obim po 40 cm. Jedan od kvadrata imaće novu stranicu 12 cm, a obim drugog kvadrata je 40 + 16 = 56, pa je njegova stranica 56 : 4 =14 cm. Površina prvog kvadrata je 144 cm^2, a drugog 196 cm^2, pa drugi kvadrat ima veću površinu.

5. Ivica kocke a = 1224:12=102 cm. Površina kocke je P= $6 \cdot 102$ =62424 cm^2, a zapremina $V = 102 \cdot 102 \cdot 102$ = 1061208 cm^3.

Opštinsko takmičenje 2006. godine

IV razred

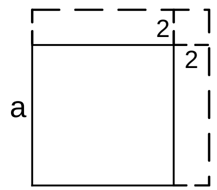
1. Koplje košta 25–22=3 zlatnika, konj 25–15=10 zlatnika, a mač 25–17=8 zlatnika. Dakle, štit košta 25–(3+10 8)=25–21=4 zlatnika.

2. (2006+2004+2002+···+6+4+2) – (2005+2003+2001+···+5+3+1) =
((2005 +1) + (2003 + 1) + (2001 + 1) +···+(5 + 1) +(3 + 1) + (1 +1)) –
-(2005+2003+2001+···+5+3+1) = 1 + 1 + 1 + ··· + 1 = 2006 : 2 = 1003

3. Neka naredne godine Jagoda ima x, a Nada x + 7 godina.Tada je
2 x = x + 7, x = 7. Jagoda ima 6, a Nada 13 godina.

4. Ako je broj učenika jednak x**,** onda jabuka ima 2 x +19 ili 100 – x, pa je 2 x +19 = 100 – x. Dakle, 3 x = 81**,** što znači da učenika ima 27, a jabuka 100 -27 = 73

5. Površina koja je dodata je 2· a +2· a +4=144, pa je 4 a =140, pa je a =35 cm, pa je O=4· 35=140 cm**,** a P = $a \cdot a$ =1225 cm^2



Opštinsko takmičenje 2007. godine

III razred

1. Za jednocifrene stranice potrebno je 9 cifara. Dakle, 129 – 9 = 120 cifara je upotrijebljeno na 120:2 = 60 dvocifrenih stranica. Prema tome numerisano je ukupno 9 + 60 = 69 stranica.

2. 20 + 3·5 + 3·8 =20 + 15 + 24 = 59.

3. Kako je polovina ustvari dvije četvrtine, Matija je dvije četvrtine novca dao Sari, jednu četvrtinu Jagodi i njemu je ostalo takođe jedna četvrtina ili 25 eura. Dakle Matija je imao 100 eura.

4. Označimo izabrani broj sa x.
Tada iz

$$(x \cdot 10 + 10) : 10 - 10 = 1.$$
$$(x \cdot 10 + 10) : 10 = 10 + 1$$
$$(x \cdot 10 + 10) : 10 = 11$$
$$x \cdot 10 + 10 = 11 \cdot 10$$
$$x \cdot 10 + 10 = 110$$
$$x \cdot 10 = 110 - 10$$
$$x \cdot 10 = 100$$
$$x = 100 : 10$$

5. Stranica prvog kvadrata je 16 cm:4 = 4 cm, a stranica drugog kvadrata je 36 cm :4 = 9 cm. Sa slike je očigledno da je stranica velikog kvadrata 4 cm + 9 cm = 13cm, njegov obim 4·13 cm =52 cm. Stranice dobijenih podudarnih pravougaonika su 4 cm i 9 cm, pa su njihovi obimi jednaki i iznose 2·(4 cm + 9 cm) = 26 cm.